Resolución 2° Parcial 2020

1. Sea la matriz A = $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & k^2 \end{bmatrix}$

a) Hallar todos los valores reales de ***K*** para que el rango de la matriz sea 2. **Justificar**

SOLUCIÓN

$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & k^2 \end{bmatrix}$ →L3-L1 → $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & k^2-4 \end{bmatrix}$ →L3+L2→ $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-4 \end{bmatrix}$

Si $k^2 - 4 = 0, entonces$ la matriz tendrá rango 2. (Ya que dos filas serán no nulas) →

Para K =2 o K = -2 la matriz tiene rango 2.

b) Si k = 3, escribir la ecuación vectorial del subespacio generado por los vectores filas de A**.** **Justificar**

Si k = 3 la dimensión del subespacio generado por los vectores filas es 3 (tres filas no nulas)

Para escribir la ecuación vectorial del subespacio generado por los vectores filas, multiplicamos cada uno de ellos por un parámetro.

X=(-2,-1,0,4).r+(0,3,1,0).s+(0,0,0,5).t $\quad \mathrm{r, s, t} \in \mathrm{R}$

2. Hallar, si existe, la intersección entre las rectas $L_1 \; y \; L_2$. $(t \; y \; r \; \in R)$

$$L_1: X = (1, -1, 0) + t\,(3, 0, -2)$$
$$L_2: X = (0, -3, 4) + r\,(-1, 1, -1)$$

Las rectas no coinciden porque los vectores directores no son paralelos.
Las rectas tendrán un punto en común P, si existe un valor del parámetro de t en la primera recta y un valor del parámetro r en la segunda tal que

P=$(1, -1, 0) + t\,(3, 0, -2)$ y
P= $(0, -3, 4) + r\,(-1, 1, -1)$
O sea

$(1, -1, 0) + t\,(3, 0, -2)$= (0,-3,4) + r (-1,1,-1)

O sea
t(3,0,-2)-r(-1,1,-1) = (0,-3,4)-(1,-1,0)

O sea

3t+r=-1
-r=-2
-2t+r=4

Resolviendo el sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad L_3 \rightarrow 2L_1 + 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \quad L_3 \rightarrow 5L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

-r=-2
3t+r=-1
El sistema tiene la solución única t= -1, r =2
Poniendo t = -1 en la primera ecuación, se tiene P= (-2,-1,2)
Se cortan en $P = (-2, -1, 2)$ para $t = -1, r = 2$.

3. Solución:

a) Vamos a hallar la forma vectorial de la recta L_2

$$L_2 \begin{cases} -x + y - 4z = 2 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

y = 3z

Reemplazando en la primera ecuación:

-x + 3z - 4z = 2

-x = 2 + z

x = -2 - z

L_2 : X = ((-2 - z), 3z, z), z $\in R$

X = (-2, 0, 0) + z (-1, 3, 1)

Para que L_1 sea perpendicular a L_2 , sus vectores directores deben ser perpendiculares, es decir que su producto escalar debe ser igual a cero:

(-2, k, 3) . (-1, 3, 1)= 2 +3k + 3 = 3k + 5 = 0

k = -5/3

b) Si la recta L_2 es perpendicular al plano de ecuación: -3x +9 y = 1, entonces la recta (y su vector director) deberían ser paralelos al vector normal al plano, *N* = (-3, 9, 0), es decir que debe existir un número real c tal que se cumpla:

c(-1, 3, 1) = (-3,9, 0)

-c = -3

3 c = 9

c = 0

Como no existe un único valor de c tal que c(-1, 3, 1) = (-3,9, 0), por lo tanto **la recta no es perpendicular al plano.**

4. Dado el siguiente sistema, determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) El subespacio de soluciones del sistema tiene dimensión 2. **Justificar** . FALSO

b) El conjunto $\{(3,-1,4)\}$ constituye una base del subespacio de soluciones del sistema dado. **Justificar** VERDADERO

Resolución parte a):

a) Para determinar la dimensión del subespacio de soluciones del sistema dado podemos operar por varios caminos. En primer lugar, una manera rápida de obtener la respuesta es calcular el rango de la matriz de coeficientes del sistema. Una vez hallado el rango y sabiendo que tenemos tres incógnitas bastará aplicar la diferencia $n - r$ para hallar la dimensión del subespacio solución del sistema dado.

Vamos a calcular el rango de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \to 3L_1 - L_2$$

$$L_3 \to 2L_1 - L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Observamos que las filas 2 y 3 son iguales por lo que nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que la cantidad de filas no nulas es 2 entonces el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Finalmente, siendo $n = 3$ y $r = 2$ resulta $n - r = 3 - 2 = 1$

Dado que la dimensión del subespacio solución es $1 \neq 2$ podemos concluir que la afirmación es falsa.

Otra forma de hallar la dimensión del subespacio de soluciones hubiera sido resolver el sistema y estudiar luego la solución según sus aspectos geométricos sabiendo que la afirmación del enunciado propone que la dimensión del subespacio solución es 2.

Estudiar el determinante de la matriz de coeficientes del sistema hubiera proporcionado algo de información pero no habría sido contundente para justificar una respuesta pues el determinante tiene que dar cero por lo que el sistema lineal homogéneo dado admite infinitas soluciones pero tendríamos luego que definir si esas infinitas soluciones forman una recta o un plano.

<u>Resolución parte b):</u>

b) Habiendo hallado en la parte a) que la dimensión del subespacio solución del sistema es 1 podemos inferir que dicho subespacio solución debe ser una recta de R^3que necesariamente pasa por el origen. Por lo tanto, la base de ese subespacio debe contener solamente un vector tal como la base propuesta en el ítem b). Ahora bien, para que ese conjunto con un solo vector sea base de la recta solución deberá generar dicha recta. Para saber si el vector $(3,-1,4)$ es o no generador de la recta en cuestión bastará verificar si está contenido en la recta:

$$\begin{cases} (3)-(-1)-(4)=0 \\ 3(3)+(-1)-2(4)=0 \\ 2(3)+2(-1)-(4)=0 \end{cases}$$

Como se puede ver sin mucho análisis el vector dado verifica las tres ecuaciones del sistema, es decir, pertenece al subespacio, por lo tanto es generador y consecuentemente por ser un solo vector linealmente independiente es base del subespacio de soluciones del sistema.

Finalmente la afirmación es <u>verdadera</u>.

Si hubiéramos buscado la solución del sistema en la parte a) hubiéramos tenido que verificar si el vector dado es o no paralelo a la recta solución. Como en este caso es paralelo forma base pues genera la recta y es LI.

5. Sean los vectores: $V_1 = (-1, \quad -1, \quad 2), V_2 = (-3, \quad 1, \quad 0)$ y $V_3 = (2, \quad -2, \quad 2)$

a) Escribir una ecuación cartesiana del subespacio S de R^3 generado por V_1, V_2 y V_3

b) ¿Es posible expresar uno cualquiera de los tres vectores V_1, V_2 o V_3 como combinación lineal de los otros dos? ¿Por qué?

a) Armamos una matriz con los vectores dados usando sus componentes como filas y la escalonamos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ -3L_1 + L_2 \to L_2 \\ 2L_1 + l_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_2 + L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego es: $rango\ A = 2 \ \ \Rightarrow la\ dimensión\ del\ subespacio\ filas\ es\ 2$

Como las filas de la matriz *A* son los vectores dados, entonces el subespacio generado por ellos tiene $\boldsymbol{dimensión\ 2}$ y una base de tal subespacio es $\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{-1}, \mathbf{-1}, \mathbf{2}), (\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{-6})\}$, el subespacio será el plano $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} \cdot (\mathbf{-1}, \mathbf{-1}, \mathbf{2}) + \boldsymbol{v} \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{-6}) \quad , \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}$

Su ecuación cartesiana tendrá la forma $ax + by + cz = 0$ donde a,b y c serán las componentes de un vector Normal al plano, Lo calculamos:

$$N = (-1, -1, 2)x(0, 4, -6) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (-2, -6, -4)$$

Una ecuación cartesiana del subespacio generado por los vectores V_1, V_2 y V_3 es:

$$\mathbf{-2}\boldsymbol{x} - \mathbf{6}\boldsymbol{y} - \mathbf{4}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

b) Sí. Como la dimensión del subespacio generado por los vectores dados es 2, los vectores V_1, V_2 y V_3 son linealmente dependientes, entonces cualquiera de los vectores se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.