UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN- Dto. de Ciencias Básicas– División Matemática
ELEMENTOS DE MATEMÁTICA (10300)- PRIMER PARCIAL 23/4 /2016

Apellido y nombre……………………………………………………Legajo……………..
Comisión Nº……….Horario………………..Docentes.............................. Tema 1

Se deberá escribir con bolígrafo o estilográfica. Se tendrá en cuenta exclusivamente lo escrito con tinta en la hoja de la evaluación.

a) No es necesario transcribir los enunciados en la hoja de la evaluación.
b) La comprensión de los enunciados forma parte de lo evaluable. No se aceptarán preguntas ni aclaraciones de ningún tipo.
c) Los datos del recuadro deben figurar en las hojas que se entreguen así como el número del tema.
d) En los ejercicios de verdadero o falso, si no se justifica la corrección es No

---

1) Despejar **x** en la siguiente relación:

$$\frac{xy}{y-1} = 1 - \frac{2x}{y-1}$$

2) Dada la sucesión $a_n = \frac{2(n-1)}{n!}$, se pide:

a) Hallar los primeros cuatro términos de la sucesión.

b) Utilizando el símbolo de ∑ indicar y calcular la suma de los primeros cuatro términos.

3) ¿Existe algún valor de ***n*** natural de forma tal que el siguiente número sea negativo? Justificar.

$$(-3)^{2n}.\,3^{2n+1}.\,(-1)^{n}$$

4) Indica con Verdadero o Falso en cada caso y justifica tus respuestas:

a) $\left(\frac{2+a}{5}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}+a^{-1}}{5^{-1}} \quad \forall\, a \in Q; a \neq -2;\ \ a \neq 0$

b) El punto medio entre el opuesto de -5 y $-\frac{1}{4}$ es $-\frac{21}{8}$**.**

5) Demostrar por inducción que $\forall n \geq 4$, resulta que: $n^2 - 2 > 2n + 2$

6) Sean $a \in Q$ y $b \in Q,$ demostrar que: $a - b = 5 \Rightarrow a^2 - b^2 = 5(5 + 2b)$

7) Para cada una de las siguientes proposiciones, (siendo x, y números reales)

- analiza el valor de verdad de cada una y justifica

(a) ∃ x, 3 x – 2 = – 4 x +1
(b) ∀x, (x-1)(x+1)= x^2-1

TEMA 1

RESOLUCIÓN

1) Despejar **x** en la siguiente relación:

$$\frac{xy}{y-1} = 1 - \frac{2x}{y-1}$$

Resolución

$$\frac{xy}{y-1} = 1 - \frac{2x}{y-1};$$

$$\frac{xy}{y-1} + \frac{2x}{y-1} = 1;$$

$$\frac{xy+2x}{y-1} = 1;$$

$$xy + 2x = 1(y-1);$$

$$x(y+2) = y-1;$$

$$\boxed{x = \frac{y-1}{y+2}}$$

2) Dada la sucesión $a_n = \frac{2(n-1)}{n!}$ **,** se pide:

a) Hallar los primeros cuatro términos de la sucesión.
b) Utilizando el símbolo de $\sum$ indicar y calcular la suma de los primeros cuatro términos.

Resolución

a) $a_1 = \frac{2(1-1)}{1!} = \frac{2.0}{1} = \frac{0}{1} = 0$

$$a_2 = \frac{2(2-1)}{2!} = \frac{2.1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{2(3-1)}{3!} = \frac{2.2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{2(4-1)}{4!} = \frac{2.3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{2(n-1)}{n!} = 0 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{23}{12}$

3) ¿Existe algún valor de ***n*** natural de forma tal que el siguiente número sea negativo? Justificar.

$$(-3)^{2n}.\,3^{2n+1}.\,(-1)^n$$

Resolución

$$(-3)^{2n}.\,3^{2n+1}.\,(-1)^n$$

El factor $(-3)^{2n}$ es siempre positivo para todo n natural ya que la base es negativa y el exponente es par.

El factor 3^{2n+1} es siempre positivo para todo n natural.

El factor $(-1)^n$ es -1 o 1 según el valor de n, es decir:

- Si n es par $(-1)^n = 1$
- Si n es impar$(-1)^n = -1$

Conclusión:

Dos de los factores son positivos para todo n natural, con lo cual para que el producto entre los tres factores sea **negativo** n debe ser un número impar.

$(-3)^{2n}.\,3^{2n+1}.\,(-1)^n$ es negativo para todo n impar

■

4) Indica con Verdadero o Falso en cada caso y justifica tus respuestas:

a) $\left(\frac{2+a}{5}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}+a^{-1}}{5^{-1}} \quad \forall\, a \in Q; a \neq -2;\; a \neq 0$

b) El punto medio entre el opuesto de -5 y $-\frac{1}{4}$ es $-\frac{21}{8}$.

Resolución

a) FALSO

Contraejemplo:

$a = 2$

Por una parte, $\left(\frac{2+2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}$. Por otro lado, $\frac{2^{-1}+2^{-1}}{5^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

$$\frac{5}{4} \neq 5$$

b) FALSO

$$\frac{-(-5)+\left(-\frac{1}{4}\right)}{2} = \frac{5-\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{19}{4}}{2} = \frac{19}{4}.\frac{1}{2} = \frac{19}{8}$$

5) Demostrar por inducción que $\forall n \geq 4$, resulta que: $n^2 - 2 > 2n + 2$

Resolución

i) Para $n = 4$, resulta $4^2 - 2 > 2.4 + 2$, o sea $14 > 10$, de modo que $P(4)$ es verdadera.

ii) Hay que demostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$k^2 - 2 > 2k + 2 \Longrightarrow (k+1)^2 - 2 > 2(k+1) + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$k^2 - 2 > 2k + 2 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 - 2 > 2k + 2 + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$k^2 - 2 > 2k + 2 \Rightarrow k^2 + 2k - 1 > 2k + 4$$

Demostración:

$$k^2 - 2 > 2k + 2$$
$$2k + 1 > 2 \text{ (V)}$$

Sumando miembro a miembro $\qquad k^2 + 2k - 1 > 2k + 4$ (V)

■

6) Sean $a \in Q \; y \; b \in Q,$ demostrar que: $\quad a - b = 5 \Rightarrow a^2 - b^2 = 5(5 + 2b)$

Resolución

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a + b).5 = (5 + b + b).5 = (5 + 2b)5 = 5(5 + 2b)$$

■

7) Para cada una de las siguientes proposiciones, (siendo x, y números reales)

- analiza el valor de verdad de cada una y justifica

(a) ∃ x, 3 x – 2 = – 4 x +1

Resolución

VERDADERO

$$3x - 2 = -4x + 1$$

$$3x + 4x = 1 + 2$$

$$7x = 3$$

$$x = \frac{3}{7}$$

Si $x = \frac{3}{7}$ entonces $3.\frac{3}{7} - 2 = -4.\frac{3}{7} + 1$, o sea $-\frac{5}{7} = -\frac{5}{7}$.

(b) ∀x, $(x-1)(x+1)= x^2-1$

VERDADERO

Por la propiedad denominada *Diferencia de cuadrados*, se sabe que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para todo a, b números reales. En este caso, vale la propiedad tomando $a = x$ y $b = 1$. También se podría haber resuelto la distributiva en el primer miembro y verificar la igualdad