



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

Sumatoria y Factorial

Trabajo Práctico 5

(Elementos de Matemática

Códigos 10014-11014

Matemática Básica

Código 13014)

Año 2025

SUMATORIA: Uso del símbolo Σ

En lo que refiere a sumas (o restas), lo más habitual, en la práctica que se desarrolla a lo largo de todos los años de estudio de la etapa escolar, es trabajar con sumas (o restas) en las que se presentan **un número “finito”** de términos. Por **términos** entendemos a las expresiones, numéricas o algebraicas, que están vinculadas entre sí a través de un signo “+” ó “-”.

A modo de observación, cabe aclarar que también podrían realizarse sumas de infinitos términos, pero estas sumas no serán objeto de estudio en nuestro curso, por lo que sólo dedicaremos nuestra atención a las **sumas de finitos términos**.

Como ejemplo:

- i) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ (suma de seis términos numéricos)
- ii) $3 + 4 + 5 + 6$ (suma de cuatro términos numéricos)
- iii) $2xy + 3x^2 - 6xy^3$ (suma y resta de tres términos algebraicos)
- iv) $1 + 8 + 3 + 15 + 22 + 53$ (suma de seis términos numéricos)

Cuando en los términos se observa cierta “regularidad” en su conformación, es decir, cuando podemos observar que todos los términos que se suman “siguen un mismo patrón”, las sumas pueden escribirse, de manera abreviada a través del símbolo que en Matemática llamamos *sumatoria*. La letra griega Σ (“sigma” mayúscula) es la que se utiliza para denotar a ese “operador matemático”.

En los cuatro ejemplos de sumas que vimos anteriormente, sólo los dos primeros tienen términos que siguen un patrón de regularidad y, por lo tanto, sólo en ellos tiene sentido utilizar el signo de la sumatoria. Efectivamente: el primer ejemplo muestra la suma de los seis primeros números pares positivos, mientras que el segundo, expresa la suma de los cuatro números enteros consecutivos desde el 3. Las sumas presentadas en iii) y iv) no tienen ninguna regularidad (o por lo menos, no se evidencia a simple vista), sino que se trata de sumas cuyos términos parecen tener absoluta independencia entre sí.

Con respecto a la suma i), se sabe que los números pares son números enteros múltiplos de 2 (dos), por lo que, para representarlos, podemos escribir una expresión de la forma $2.k$, donde k indica un número entero.

A partir de lo dicho, en el ejemplo i) lo que estamos sumando son los números que tienen la forma:

$$2 \cdot 1; \quad 2 \cdot 2; \quad 2 \cdot 3; \quad 2 \cdot 4; \quad 2 \cdot 5 \text{ y } 2 \cdot 6$$

es decir, los números que pueden escribirse mediante la forma $2k$, pero con los valores de k que van consecutivamente desde 1 hasta 6. De este modo, la suma planteada en i) puede plantearse como:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$$

lo que, de manera abreviada, y utilizando el símbolo Σ para representar a las sumas, puede expresarse de la forma:

$$\sum_{k=1}^{k=6} 2k \quad (*)$$

que se lee: *suma desde $k = 1$ hasta $k = 6$ de los números $2k$* . Desarrollar esa suma es escribir explícitamente **todos sus términos**, desde el que se forma con el valor $k = 1$ (el primero) hasta el que se forma con $k = 6$ (el último), tomando todos los valores consecutivos entre ellos, relacionando a todos con un signo “+”, pues se trata de una suma. En síntesis, la sumatoria planteada en (*) es la suma:

$$\sum_{k=1}^{k=6} 2k = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6$$

cuyo **valor** es el resultado de dicha suma, que en este caso es 42, es decir

$$\sum_{k=1}^{k=6} 2k = 42$$

Observación: para no recargar la escritura, al último de los valores que toma la variable k en una suma, suele escribirse sin mencionar el nombre de dicha variable, es decir, lo más usual es escribir la suma (*) como:

$$\sum_{k=1}^6 2k$$

También muchas veces, se omite el nombre del índice en ambos extremos, pero esto sólo cuando se sobreentiende cuál es dicho índice, y únicamente si no da lugar a confusión.

Otra forma alternativa de escribir la sumatoria es indicando, sólo en el extremo inferior del signo, el rango de valores que toma la variable k con lo cual, la suma anterior quedaría expresada como:

$$\sum_{k=1}^6 2k = \sum_{1 \leq k \leq 6} 2k$$

Por otro lado, la suma planteada en ii) muestra la suma de los números 3; 4; 5 y 6. Éstos también pueden sumarse mediante el modo abreviado que ofrece el operador “sumatoria”, pues lo que se está sumando son los números enteros (podríamos decir *naturales* en este caso) que pueden representarse mediante la variable k , cuando ésta toma los valores 3; 4; 5 y 6, esto es: la suma $3 + 4 + 5 + 6$ podría expresarse, abreviadamente, como

$$\sum_{k=3}^6 k = 3 + 4 + 5 + 6$$

que se lee “suma de los números k entre 3 y 6”, porque, justamente, estamos sumando los términos que se corresponden con los valores que van desde $k = 3$ hasta $k = 6$, cuyo valor total es

$$\sum_{k=3}^6 k = 18$$

En síntesis, los términos de una suma que puede ser expresada a través del símbolo $\sum$ (es decir, mediante una “sumatoria”) deben presentar cierta regularidad en su conformación. Esto, permite escribirlos a partir de una expresión que manifieste dicha regularidad o secuenciación, que suele ser escrita como una “fórmula” en términos de una variable que puede ser, como en los ejemplos que vimos, representada por la letra “ k ” o cualquier otra que se elija, como ser las letras “ i ”, “ j ”, ó también “ n ”, entre otras.

En líneas generales, dicha fórmula suele escribirse mediante expresiones que pongan de manifiesto qué operación debe hacerse con la variable k (que usualmente se la conoce como

índice de sumación) para representar a cada término de la suma. Esa expresión en términos de k puede ser representada mediante notaciones como a_k ó x_k u otra, según resulte conveniente (el término a_k se lee “a sub k”).

En nuestros ejemplos, en la suma i) tenemos $a_k = 2k$ y en la ii) $a_k = k$. Estos son sólo dos ejemplos de “términos” que pueden ser sumados. En los ejercicios se verán otros, y en cualquier texto se encontrarán muchos más.

Los valores que se indican en la base y en la parte superior de la sumatoria, son los **valores extremos** que toma la variable (en nuestros ejemplos, $k = 1$ y $k = 6$ en la primera de las sumas y $k = 3$ y $k = 6$ en la segunda). A los términos que se suman, los que indicamos con a_k ó x_k se los suelen llamar “término general” de la suma.

Algunos otros ejemplos de sumas pueden ser:

$$*) \sum_{j=1}^5 3j = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15$$

$$*) \sum_{k=2}^6 k = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

$$*) \sum_{i=-3}^2 3^i = 3^{-3} + 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 3^2 = \frac{364}{27}$$

$$*) \sum_{n=3}^7 (-1)^n = (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) = -1$$

$$*) \sum_{t=0}^4 X^t = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$$

Un ejemplo más general es:

$$*) \sum_{k=m}^n x_k = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{n-1} + x_n$$

donde m y n son números enteros y, además, $m \leq n$.

La notación $\sum_{k=m}^n x_k$ se lee: **sumatoria** (o suma) de los términos “x sub k” donde k toma todos los valores enteros consecutivos desde **m** (*índice inferior*) hasta **n** (*índice superior*).

Ejercicio 1. Expresar en forma desarrollada cada una de las siguientes sumas, y hallar el valor numérico de cada una, cuando ello resulta posible:

$$a) \sum_{k=3}^5 k^2$$

$$b) \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(2n)^{n-1}}$$

$$c) \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^{k+1}}$$

$$d) \sum_{k=0}^6 (-1)^k 2^k$$

$$e) \sum_{i=1}^6 2$$

$$f) \sum_{k=0}^6 x$$

$$g) \sum_{j=-1}^2 j^{2-j}$$

$$h) \sum_{i=0}^3 x^{2i}$$

$$i) \sum_{k=-2}^2 k + \sum_{j=0}^3 2^j$$

Ejercicio 2. Escribir la representación decimal del resultado de la suma:

$$\sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{k+1} \right)$$

Ejercicio 3. Escribir, usando el símbolo “sumatoria”, las siguientes sumas:

$$a) 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$$

$$b) 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

$$c) 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$$

$$d) -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$e) 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \quad \text{“suma de los primeros } n \text{ números naturales”}$$

Ejercicio 4. Expresar cada una de las siguientes sumas de forma desarrollada.

$$n \in \mathbb{N}$$

$$a) \sum_{i=1}^n i$$

$$b) \sum_{i=1}^n 2^i$$

$$c) \sum_{i=1}^n 2i$$

Algunas propiedades de las sumatorias

Las sumas expresadas mediante el símbolo de “sumatoria”, no dejan de ser sumas y, como tales, satisfacen las mismas propiedades que utilizamos en los cálculos habituales donde ellas aparecen involucradas. En particular, las sumas satisfacen la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa, las cuales indican que permiten cambiar el orden de los términos o agruparlos convenientemente, y los resultados no modifican el que se hubiese obtenido si no se hacían esos cambios o reagrupamientos. Si bien no nos abocaremos a demostrar las propiedades que enunciamos, es importante reconocer cuáles son y cómo utilizarlas en caso que se presente la necesidad de hacerlo.

Entre otras, las propiedades que nos interesa destacar son las siguientes, aplicadas a la suma de los términos que llamaremos a_i ó b_i según resulte conveniente, y $n, m \in \mathbb{N}$

$$a) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad b) \sum_{i=1}^n k a_i = k \cdot \sum_{i=1}^n a_i \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$c) \sum_{i=1}^n k = n \cdot k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad d) \sum_{i=1}^{n+m} a_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i$$

$$e) \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \quad f) \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$$

siendo $m \leq n, m, n \in \mathbb{N}$

Si bien hay otras propiedades, éstas serán suficientes para los cálculos que necesitaremos realizar en el contexto de nuestro trabajo.

La propiedad *b)* es la que indica que puede sacarse factor común de una suma, la *c)* expresa el cálculo de sumar n términos iguales (constantes) y la *d)* indica que una suma puede descomponerse en dos sumas, agrupando los primeros términos y calculando su suma, por un lado, y agrupar los últimos y calcular esta suma, por otro.

Ejercicio 5. Apelando al uso de las propiedades (decir cuales), cuando sea posible, calcular las siguientes sumas

$$a) \sum_{k=1}^4 [(2)^k + 5k] \quad b) \sum_{k=1}^4 [(2)^k + 5] \quad c) \sum_{k=0}^4 [(2)^k - 4(k-1)]$$

$$d) \sum_{i=1}^{12} i - \sum_{i=1}^4 i \quad e) \sum_{k=0}^6 2^k - \sum_{k=0}^4 2^k \quad f) \sum_{k=1}^{10} (2k) + 3 \sum_{k=1}^{10} k$$

NOTA: Los pasos realizados en la resolución para llegar al resultado, no necesariamente son los únicos. Cada uno podrá resolver el ejercicio aplicando las operaciones o propiedades que considere más adecuados a su forma de proceder.

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Tomemos un número entero positivo cualquiera, por ejemplo el número 6, y hagamos la siguiente multiplicación: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (también podríamos haber hecho $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$), es decir, el producto de todos **los enteros positivos desde 1 hasta 6**.

A este resultado se lo llama *factorial de 6* o “6 factorial” y se lo indica poniendo un signo de admiración detrás del número 6, es decir, se lo indica como $6!$, y su resultado, es:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

El *factorial* de un número representa lo que también podría llamarse un “operador”, en el sentido que indica “una operación por hacerle a un número”.

¿Cuáles son los números “sometidos a esta operación”? o dicho de otro modo, ¿a qué números se les puede calcular el factorial? Esta operación está definida para todos los números naturales, y también para el 0 (cero), es decir, para todos los números **enteros no negativos (mayores o iguales que cero)**. Lo que resulta importante a esta altura es conocer cuál es el cálculo que, mediante el operador factorial se propone hacer, en general, a un número, tal como vimos que hace con el 6.

Una manera formal de definir el factorial es a través de lo que se llama “definición por recurrencia” ó “definición inductiva”. Este tipo de definiciones de un concepto no “muestran directamente” al elemento definido, sino que indica cuál es el paso o los pasos que se deberían seguir desde un primer elemento definido, a partir de una “regla de recurrencia”. Esto significa lo siguiente: se define el concepto para el primer número del conjunto de referencia (en nuestro caso, los enteros mayores o iguales que cero) y luego, suponiendo ya conocido el valor que toma en algún número del conjunto, se indica de qué modo calcular el valor que toma en el siguiente número. En síntesis, se hace una definición *exclusiva* para el primer elemento (ese, en nuestro caso, será el 0) y luego se dice cómo calcular el “valor siguiente” conociendo su “valor anterior”, es decir, si conociéramos el valor que toma en un determinado número k , la regla de recurrencia nos indica cómo calcular el valor que toma en el número $(k+1)$. En el caso del factorial de un número, esta definición es la siguiente:

Definición (de Factorial de un número entero no negativo)

Dado un número **entero no negativo** n ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$), el *factorial de n* , que escribimos con el símbolo $n!$ se define a partir de la siguiente regla de recurrencia:

$$0! = 1$$

y luego, para cada n , suponiendo conocido el valor de $n!$, se define el valor de $(n + 1)!$ como

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

Aquí es importante destacar que, de acuerdo a lo que dice la definición precedente, no es posible conocer “inmediatamente”, por ejemplo, el factorial de 21, es decir el valor de **21!**, sin conocer el valor de $20!$. Lo que sí sabemos, es que

$$21! = 21 \cdot 20!$$

Y aquí, nuevamente surge la pregunta... ¿Cuánto vale $20!$? Tampoco surge “inmediatamente” de la definición dada, pero sí sabemos que vale

$$20! = 20 \cdot 19!$$

y así siguiendo...

Tal como lo dijimos, el carácter *inductivo* de la definición, nos permite, conocido el valor de un determinado factorial, conocer el del siguiente, por lo que debiéramos comenzar a conocer estos valores, **desde el primero que desconocemos**... y ese primer valor que “desconocemos” explícitamente, en nuestro caso, es $1!$

Veamos, entonces, cómo utilizar la “fórmula” que da nuestra definición, y veamos si, posteriormente, podemos arribar a una definición “más amigable” del factorial de un número entero $n \geq 0$.

En principio, de acuerdo a la definición, tenemos lo siguiente:

$$1! = (0 + 1)! \underset{\substack{\text{por} \\ \text{definición}}}{=} (0 + 1) \cdot 0! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$$

Es decir,

$$1! = 1$$

Ahora, usamos nuevamente la definición para hallar $2!$

$$2! = (1 + 1)! \underset{\substack{\text{por} \\ \text{definición}}}{=} (1 + 1) \cdot 1! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$$

Es decir:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Del mismo modo, procedemos para hallar $3!$

$$3! = (2 + 1)! \underset{\substack{\text{por} \\ \text{definición}}}{=} 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Y, por lo tanto:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Como ejercicio, se propone calcular, usando la definición, los valores de: $4!$, $5!$ y $7!$ (el cálculo de $6!$ ya lo mostramos como ejemplo en la introducción del tema) y ver que dichos valores son:

- i) Factorial de 4: $4! = 24$
- ii) Factorial de 5: $5! = 120$
- iii) Factorial de 7: $7! = 5040$.

A partir de todo lo que se dijo, se puede dar una nueva definición de $n!$ que resulta **más operativa**, y **explícite el procedimiento** para hallar su valor numérico. Esa “nueva definición” es la que dice que el factorial de **un número entero $n \geq 0$** , que escribimos como $n!$ se define como $0! = 1$ (cuando $n = 0$) y luego, para cualquier otro valor n , como **el producto de todos los números naturales** desde 1 hasta n . Es decir:

Definición equivalente de Factorial:

El número $n!$ (que se lee “ n factorial” o “factorial de n ”) se obtiene haciendo:

$$\text{Para } n = 0: \quad 0! = 1$$

y, si n es natural, se obtiene mediante el cálculo:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

En resumen, el factorial es otro operador matemático de uso muy corriente en varias ramas de la Matemática, como en el cálculo de probabilidades, en Estadística y en Física, entre otras.

De la definición puede observarse que **para todo número natural n** se verifica la relación:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

que, en ejemplos, sería: $9! = 9 \cdot 8!$, $15! = 15 \cdot 14!$

Pequeña digresión: Una aplicación del factorial

El operador “factorial” representa un cálculo muy utilizado en una rama de la Matemática que se conoce con el nombre de **Combinatoria**, en la cual se determinan ciertas estrategias o procedimientos que permiten “contar” los elementos de un conjunto, o definen la mejor manera de agruparlos de acuerdo a distintas situaciones o contextos.

Una inquietud usual de la Combinatoria es la siguiente:

Dado un número n de objetos “distintos” (n objetos “sin repetición”) ¿cuántas maneras diferentes de ordenarlos hay? Esa cantidad, justamente está determinada por el valor $n!$, es decir, $n!$ indica el número total de maneras de ordenar n objetos distintos.

Como ejemplo, el número de maneras que se tiene de ordenar seis libros en un estante de biblioteca, todos distintos entre sí, es $6!$

No entraremos en detalle sobre este punto porque no es objeto de este curso estudiar este tipo de problemas, pero a modo de ejercicio, podría verificarse que, dados **tres** libros distintos, hay $6 = 3!$ formas de ordenarlos sobre un estante (cuando se haga el ejercicio, sugerimos escribir con sus propias palabras o cálculos los argumentos que utiliza para justificar ese resultado).

Observación: Recordemos que, en el cálculo de las potencias de un número, cuando éstas se encuentran multiplicadas por otro número, como por ejemplo, cuando calculamos $2 \cdot 3^2$, lo que estamos haciendo es:

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot (3^2) = 2 \cdot 9 = 18$$

lo cual es diferente del cálculo:

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

Lo que hacemos, en casos como estos, es priorizar las operaciones, entendiendo que **implícitamente** está planteado un paréntesis que indicaría cuál es la operación que se realiza primero. En esos casos, lo que consideramos es que:

$$k \cdot a^n = k \cdot (a^n)$$

En el caso de las expresiones que involucran al factorial de un número, ocurre la misma situación. Por ejemplo:

$$3.4! = 3.(4!) = 3.24 = 72$$

a diferencia de lo que sería calcular

$$(3.4)! = 12! = 479001600$$

¡Cuánta diferencia que hay entre ambos resultados! (observar “lo mucho y rápido” que crecen “los factoriales”).

En resumen, lo que se debe tener en cuenta es que, para calcular $k.n!$ debe hacerse:

$$k.n! = k.(n!)$$

y, por lo tanto, **hay que diferenciar** el cálculo $k.n!$ del que resulta de hacer $(k.n)!$

Ejercicio 6. Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) \frac{6!}{5}$$

$$b) \frac{7!}{7}$$

$$c) \frac{8!.7!}{6!.5!}$$

$$d) \frac{n!}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$e) \frac{(n+1)!}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$f) \frac{n.(n+2)!}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 7. Factorizar las siguientes expresiones sacando, en cada caso, el factor común que se indica:

$$a) 5! \text{ de } 5! + 7!$$

$$b) 4! \text{ de } 4! + 8 + 5!$$

$$c) n! \text{ de } ((n+1)! + n!)$$

$$d) 2(n-1)! \text{ de } (3!(n-1)! + n! - 4(n+1)!)$$

$$e) (n+1) \text{ de } ((n+2)! - (n+1) + (n+1)!)$$

$$f) 2!(n+2)! \text{ de } (6(n+3)! - 2(n+2)! + 4(n+4)!)$$

Ejercicio 8. Calcular el valor de las siguientes expresiones numéricas (A , B y C) y decidir si su resultado es o no un número entero:

$$A = \frac{10! - 8!}{7!}$$

$$B = \frac{9! + 8!}{2.7!}$$

$$C = \frac{(3! + 1).(3 + 1)!}{3!}$$

Ejercicio 9. Escribir en forma de fracción simple ó irreducible el resultado de la siguiente operación:

$$\frac{10(n+1)!}{(15n+15)n!}$$

Ejercicio 10. Mostrar que:

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$$

Ejercicio 11. Dada la suma

$$\sum_{k=-2}^2 \frac{15}{8+2k}$$

expresarla término a término (es decir sin apelar al símbolo de sumatoria) y calcular su valor numérico.

Ejercicio 12. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- a) El número $A = \frac{16(8!+7!)}{9!}$ representa a un número **entero**
- b) El número $A = \frac{60(5!+4!)}{6!}$ no representa a un número **entero**

Ejercicio 13. Verificar que para todo número natural n mayor o igual que 2 vale la igualdad:

$$\sum_{i=0}^1 \frac{i+1}{(n-i)!} = \frac{1+2n}{(n)!}$$

Ejercicio 14. Calcular el valor numérico del número real A , definido como:

$$A = \frac{18! - 19!}{18 \cdot 18!} + \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+18} \cdot \frac{2k-1}{|-k|}$$

e indicar si se trata de un número **entero** o no

Ejercicio 15. Dada la siguiente sumatoria: $A = \sum_{i=3}^5 \frac{|1-i|}{2^{(i-3)}}$

Calcular el valor numérico de A

Ejercicio 16. Mostrar que: $\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n^2+2n+2}{n+1}$

Ejercicio 17. Mostrar que: $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n^2+2n}{n+1}$

Ejercicio 18. Mostrar que $\frac{n(n+2)!}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^3 (-1)^{(n+1)} = (n+1)^2$