



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

Nociones de lógica

Trabajo Práctico 3

Matemática básica Código (13014)

Elementos de Matemática

Códigos (10014-11014)

Año 2025

Algunas nociones de Lógica: Proposiciones

En Matemática es habitual utilizar símbolos para escribir y comunicar nuestras ideas como también hacer uso del lenguaje coloquial, el que empleamos cotidianamente. Si bien diariamente utilizamos expresiones más o menos precisas, es muy deseable que cuando *operamos* o nos expresamos en Matemática, nuestro lenguaje sea sumamente preciso.

Uno de los objetivos importantes del curso consiste en escribir nuestras ideas con precisión, sin ambigüedades, entendiendo no solo el lenguaje coloquial, sino también el simbólico propio de la Matemática. Esta es una tarea a la que nuestra asignatura presta especial atención.

Trabajaremos con algunos elementos básicos de lógica proposicional que nos ayudarán al respecto.

Proposiciones

En nuestra vida habitual, como estudiantes o como simples ciudadanos, muchas veces utilizamos afirmaciones que resultan verdaderas o falsas, es decir, afirmaciones cuyo *valor de verdad* es Verdadero o Falso. Ejemplos de este tipo de afirmaciones pueden ser:

“Todos los triángulos tienen tres lados”, “La Luna se encuentra a 500 km de la Tierra”, “José Hernández es el autor del libro *Martín Fierro*”, o “Piñera es el actual presidente chileno”

También es común el uso de expresiones que no admiten ningún valor de verdad, como podrían ser las siguientes:

“¿Cómo se llama usted?”, “Cierre la puerta, por favor” o “ $(2 + 3) \cdot 4$ ”

Llamaremos **proposiciones** a las afirmaciones del primer tipo, es decir, aquellas que resulten ser verdaderas o falsas (pero no ambas cosas a la vez).

“Los triángulos equiláteros tienen tres lados iguales” es una proposición verdadera (también se dice que su valor de verdad es Verdadero).

“ $24 - 8 = 15$ ” es una proposición falsa (su valor de verdad es Falso)

Podemos afirmar entonces que una proposición tendrá asociado siempre un único valor de verdad (V o F)

Ejercicio 1 Dadas las siguientes expresiones asignar, a las que sean proposiciones, su valor de verdad. Justificar los casos en que sean falsas

- a) Un cuadrilátero es un polígono de 4 lados
- b) El perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de sus lados
- c) $3+2$
- d) Los electrones poseen carga negativa
- e) $\sqrt{81}$
- f) ¿Aprobaré Elementos de Matemática este cuatrimestre?
- g) 5 es un número impar.
- h) Todas las aves vuelan.

- j) La capital de Francia es París.
- k) La moneda de España es el Euro.
- l) 4 es múltiplo de 2
- m) El inverso de 4 es $(-1/4)$

Ejercicio 2 Si es posible, asignar a las variables que aparecen en las siguientes expresiones, un valor numérico de modo que resulten proposiciones verdaderas.

- a) $x^2 + 4 = 8$
- b) $2t + 1 \geq 5$
- c) $3z + 1 = \frac{2}{3}$
- d) $\sqrt{81} = y$
- e) $-\sqrt{81} = x$
- f) $x^3 = x \cdot x \cdot x$
- g) $2x = x \cdot x$

Proposiciones enunciadas a partir de cuantificadores universales y existenciales

Hay expresiones que resultan verdaderas para todos los individuos del universo en el cual se la considera, como por ejemplo $x^3 = x \cdot x \cdot x$, es decir que **cualquiera** sea el número real que elijamos, éste verifica esa igualdad. A partir de esas expresiones podemos construir proposiciones **cuantificadas universalmente** que resulten verdaderas.

Podemos decir entonces que para todo número real x , la afirmación $x^3 = x \cdot x \cdot x$ es verdadera.

Esto puede simbolizarse: $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = x \cdot x \cdot x$

El símbolo “ $\forall$ ” se llama cuantificador universal, y puede leerse “Para todo” o “**cualquiera** sea”.

Una proposición enunciada mediante un cuantificador universal, es la que afirma que una cierta condición P (propiedad, característica, etc) es verificada **por todos los elementos de un conjunto U**. Tal tipo de proposición puede expresarse en la forma genérica:

$$\forall x \in U, P(x)$$

Así, también hay expresiones que resultan verdaderas para **algunos** individuos del universo, como por ejemplo “ $x \cdot x = 2 \cdot x$ ”, se cumple solamente cuando x es 0 o cuando x es 2. Podemos decir, entonces, que **existen** algunos números reales **que** verifican esta igualdad. A partir de esas expresiones podemos construir proposiciones *cuantificadas existencialmente* que resulten verdaderas.

Con la igualdad $2x = x \cdot x$ se puede construir, apelando al uso de un cuantificador, una proposición que puede ser verdadera o falsa, según cómo se la construya (asumamos que $x \cdot x$ es equivalente, por definición, a x^2). Por ejemplo, la proposición: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2 \cdot x$, resulta ser una proposición verdadera (en este caso, se apeló al *cuantificador existencial*, que se lo simboliza con “ $\exists$ ”, y puede leerse “Existe por lo menos un”). Es verdadera, porque efectivamente existe por lo menos un número real que satisface la igualdad, por ejemplo, $x = 0$ (también podríamos haber elegido $x = 2$, pero ningún otro).

En cambio, la proposición que utiliza la misma igualdad, pero enunciada mediante un cuantificador universal, como podría ser: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 2 \cdot x$, resulta ser falsa. Esta proposición expresa que *todo número real x verifica la igualdad $x^2 = 2 \cdot x$* , y es falsa, porque, por ejemplo, no es satisfecha esa igualdad por $x = 3$ ($3^2 = 9$, mientras que $2 \cdot 3 = 6$, y $9 \neq 6$).

De manera similar a lo que hicimos al mencionar cómo es una proposición enunciada con un cuantificador universal, podemos decir que una proposición enunciada mediante un **cuantificador existencial**, se escribe en la forma:

$$\exists x \in U: P(x)$$

donde se expresa que: **hay elementos x en el conjunto U que verifican la propiedad P .**

Tal como ya lo hemos visto, se pueden construir proposiciones cuantificadas cuyo valor de verdad puede ser, tanto verdadero como falso.

Para ilustrar un poco lo dicho, veamos los siguientes ejemplos de proposiciones, para las cuales el valor de verdad **es falso**:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x$ 2) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$ 3) $\exists x \in \mathbb{Z}: 2x + 1 = 0$
4) $\exists x \in \mathbb{N}: x + 1 = 0$

Ejercicio 3: A partir de las siguientes expresiones, enunciar proposiciones cuantificadas universalmente, y determinar su valor de verdad, justificando aquellas que resulten **falsas**.
No te olvides de determinar el universo en cada proposición enunciada

- 1) $x^2 \geq 1$
2) $x^3 \geq 3x^2$
3) $x + 1 = x + 2$

Ejercicio 4: A partir de las siguientes expresiones enunciar proposiciones cuantificadas existencialmente. Determinar su valor de verdad, justificando las que resulten **verdaderas**.
No te olvides de determinar el universo en cada proposición enunciada

- 1) $x + 1 < x + 2$
2) $x^3 \geq 3x^2$
3) $x + 1 = x + 2$

Algunos conectivos lógicos

Los símbolos: $\wedge$ (se lee “y”); $\vee$ (se lee “o”); $\Rightarrow$ (se lee “implica”); $\Leftrightarrow$ (se lee “equivale” o “si y solo si”) y $\sim$ (se lee “no”) se llaman **conectivos**, y se los utiliza para relacionar proposiciones, generando otras a su vez.

Consideremos las siguientes situaciones:

Pablo le dice a su novia: “Esta noche te llevo al cine y a cenar” y Daniel le dice a su novia “Esta noche te llevo al cine o a cenar”. ¿Las propuestas son iguales? Supongamos que, por

falta de dinero, ambos llevaron a sus novias sólo al cine. ¿Cumplieron ambos su propuesta? Proponemos analizar dicha respuesta.

Dos o más proposiciones se pueden vincular para dar lugar a otra proposición a la que se llama **proposición compuesta**.

Designemos con **p** a la proposición “Los gatos son mamíferos” y con **q** a la proposición “La raíz cúbica de -8 es -2 ”.

Llamaremos **conjunción entre las dos proposiciones dadas** a la proposición que expresa: “Los gatos son mamíferos y la raíz cúbica de -8 es -2 ”. Esta proposición compuesta, que es la conjunción de las proposiciones p y q , se la simboliza como: $p \wedge q$

¿Cuál es el valor de verdad de esta nueva proposición, de la conjunción? Es verdadera, ya que para que una **conjunción sea verdadera ambas proposiciones** que la forman **deben ser verdaderas**.

Llamaremos **disyunción entre dos proposiciones dadas** p y q , a la proposición que simbolizaremos como $p \vee q$. En el caso de las dos proposiciones enunciadas anteriormente, la conjunción entre ellas queda planteada como:

“Los gatos son mamíferos o la raíz cúbica de -8 es -2 ” (se simboliza $p \vee q$)

¿Qué sucede con el valor de verdad de una disyunción? Basta con que **alguna de las proposiciones** que la forman **sea verdadera** para que la **disyunción también lo sea**.

Ejercicio 5: Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

- a) $5 \geq 2$
- b) -3 es un numero natural o $(-3)^2 = 9$
- c) El número 2 es primo ó es impar
- d) El número 2 es primo y es impar
- e) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ y $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, siendo a y b números reales cualesquiera.
- f) $\frac{1}{2}$ es un número racional y 0 es par
- g) $3 < 2 \wedge 5 > 1$
- h) $3 < 2 \vee 5 > 1$
- i) $10 \geq 2$ y $5 \leq 5$
- j) $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{9} = -3$
- k) Un cuadrilátero es un polígono de 4 lados y 10 es divisible por 2

Veremos que, en ocasiones, dada una proposición **p**, es necesario trabajar con **la negación** de p (se simboliza $\sim p$), de tal manera que si p es verdadera resulta $\sim p$ falsa y viceversa.

Por ejemplo:

- Para la proposición **p**: “Roberto es argentino” resulta su negación $\sim p$: “Roberto no es argentino”.
- Para la proposición **p**: “ $\sqrt{9} > 3$ ” resulta que su negación es $\sim p$: “ $\sqrt{9} \leq 3$ ”.

¿Cómo negar una conjunción o una disyunción de proposiciones?

Nos interesa, ahora, ver cómo se hace para establecer la negación de una proposición de la forma $(p \wedge q)$ o una de la forma $p \vee q$, es decir, cuál es la “forma” que adquiere la negación de una conjunción o de una disyunción.

Antes, recordemos que, el hecho de que una proposición **p** sea verdadera, es equivalente a que su negación, $\sim p$ sea falsa.

Teniendo en cuenta esto, una manera de pensar por qué **una conjunción $(p \wedge q)$ es falsa** (o, lo que es equivalente, **por qué es verdadera la proposición $\sim(p \wedge q)$**), es a partir de las condiciones que hacen que una conjunción sea falsa: que **alguna** de las proposiciones que la componen **sea falsa**. Pero, si alguna de las proposiciones, la **p** o la **q** son falsas, es porque son verdaderas algunas de sus negaciones, es decir que, **$\sim p$ es verdadera** o **$\sim q$ es verdadera**. De este modo, si $p \wedge q$ es falsa, a partir de lo que acabamos de explicar resulta, entonces, que la proposición que es verdadera es $(\sim p) \vee (\sim q)$. Así, la proposición que resulta como **negación de una conjunción $(p \wedge q)$** es equivalente a la **disyunción de las negaciones** de **p** y de **q**.

Podemos, entonces, enunciar una propiedad para este tipo de proposiciones compuestas, que es la siguiente:

Si **p** y **q** son proposiciones, entonces se verifica que **la negación $\sim(p \wedge q)$ es equivalente a la proposición $(\sim p) \vee (\sim q)$** es decir:

$$\sim(p \wedge q) \text{ tiene el mismo valor de verdad que } (\sim p) \vee (\sim q).$$

De manera análoga, se razona para decidir cuándo es falsa una disyunción. Una manera de pensar la negación de la proposición $(p \vee q)$ es como la conjunción de las negaciones de ambas proposiciones (las de **p** y **q**), es decir, como $(\sim p) \wedge (\sim q)$ (recordar que una **disyunción $p \vee q$ es falsa** solo cuando **ambas proposiciones, la p y la q son falsas**). Así, la negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones de **p** y de **q**.

Al igual que antes, surge, entonces, la siguiente propiedad para la negación de una disyunción de proposiciones:

Si **p** y **q** son proposiciones, entonces se verifica que **la negación $\sim(p \vee q)$ es equivalente a la proposición $(\sim p) \wedge (\sim q)$** es decir:

$$\sim(p \vee q) \text{ tiene el mismo valor de verdad que } (\sim p) \wedge (\sim q).$$

En resumen, lo que podemos decir es que,

- la negación: $\sim(p \wedge q)$ se enuncia como $(\sim p) \vee (\sim q)$
- la negación: $\sim(p \vee q)$ se enuncia como $(\sim p) \wedge (\sim q)$

Como ejemplo: si tenemos, independientemente de su valor de verdad, la proposición

“k es un número entero par y múltiplo de tres”

Su negación es:

“k es un número entero impar o k no es múltiplo de tres”

Si, ahora, la proposición enunciada para dos números enteros a y b es:

“(a + b) es un número entero par o, (a · b) es un número entero par”

Su negación es:

“(a + b) es un número entero impar y (a · b) es un número entero impar”

Observación: En algunas ocasiones, para verificar que una determinada proposición es verdadera, puede apelarse al recurso de ver que la negación de dicha proposición es falsa. En el caso de que las proposiciones sean conjunciones o disyunciones, para apelar a este procedimiento, hay que tener en cuenta las reglas que hemos planteado para las negaciones de cada una.

¿Cómo negar una proposición enunciada a partir de cuantificadores universales y existenciales?

Como dijimos anteriormente, una proposición enunciada mediante un cuantificador universal, es la que afirma que cierta condición P (propiedad, característica, etc) es verificada **por todos los elementos de un conjunto U** . Tal tipo de proposición puede expresarse en la forma genérica:

$$\forall x \in U, P(x) \quad (*)$$

que afirma que todo elemento x de un conjunto U satisface la propiedad P .

La negación de la proposición $(*)$ expresa, coloquialmente, que **no es cierto que todos los elementos de U verifican la propiedad P** , o lo que es equivalente, **hay elementos de U que NO verifican la propiedad P** . Observar que esto NO es lo mismo que decir que ningún elemento de U la verifica... sólo afirma que *hay algunos que no la verifican*.

Acordemos en la siguiente notación: si algún elemento NO verifica la propiedad P , diremos que verifica su negación, es decir, verifica lo que notaremos como $\sim P$ (que en algunos textos podrán encontrar también expresada como $\neg P$ u otro símbolo antecediendo a P , que sólo indica que NO se verifica P , más allá de que ese NO lo indiquemos con $\neg$, con $\sim$ ó cualquier otro símbolo a modo de negación). En nuestro caso, negar la proposición $(*)$ es afirmar que, tal como lo señalamos anteriormente, hay elementos de U que NO verifican P , o dicho de otro modo, que hay elementos de U que verifican $\sim P$.

Que haya algunos elementos de U con ciertas características, lo señalamos diciendo que “existen elementos de U que poseen cierta característica”, y si la característica es que verifique $\neg P$, lo indicaremos, simbólicamente, como:

$$\exists x \in U: \sim P(x)$$

Resumiendo, la proposición que corresponde a la **negación** de una proposición de la forma:

$$\forall x \in U, P(x)$$

es la que se simboliza como:

$$\exists x \in U: \sim P(x)$$

De manera similar, es decir, razonando en la misma dirección que acabamos de hacer, una proposición enunciada mediante un **cuantificador existencial**, de la forma:

$$\exists x \in U: P(x)$$

(que expresa que: **hay elementos x en el conjunto U que verifican la propiedad P**) se niega diciendo que **no es cierto que haya elementos de U que verifiquen P** , o lo que es equivalente: **ningún elemento de U verifica P** , que, a su vez, también puede expresarse como ***todos los elementos de U verifican $\sim P$*** .

En resumen, la **negación** de una proposición de la forma

$$\exists x \in U: P(x)$$

se expresa, simbólicamente, a través de la proposición:

$$\forall x \in U, \sim P(x)$$

Ejercicio 6: Escribir la negación de cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas, siendo **x un número real**

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 20$
- b) Existen números negativos (se la puede expresar como: $\exists x \in \mathbb{R}: x < 0$)
- c) Algún alumno de esta comisión es extranjero
- d) Todos los alumnos de esta comisión tienen más de 17 años.
- e) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 = 8$
- f) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$
- g) Algún número natural es negativo
- h) Todo número natural tiene un siguiente
- i) Algunos números reales tienen inverso multiplicativo

Otros “conectivos” para las proposiciones

Otra proposición compuesta muy utilizada en Matemática es la llamada **implicación**.

Consideremos las siguientes proposiciones (*):

p: Jorge nació en Buenos Aires

q: Jorge nació en Argentina.

No conocemos el valor de verdad de cada una de ellas, pues no sabemos quién es Jorge. Pero aún así, es posible asegurar que **si p fuera verdadera, entonces q también lo sería**. Dicho de otro modo: **de la verdad de p se deduce o infiere la verdad de q** o, más usualmente: **si ocurre p , entonces, ocurre q** .

Esta última frase puede escribirse, en símbolos, como: **$p \Rightarrow q$**

El símbolo “ $\Rightarrow$ ” hace referencia a *la implicación* y puede leerse “*implica*”; p es el **antecedente** de la implicación y q es el **consecuente** de la implicación. Se dice también que consecuente **q** “se infiere” del antecedente **p** , o también, que **q** “es una consecuencia” de **p** .

Volviendo entonces al ejemplo anterior (*), podemos escribir en forma simbólica:

$p \Rightarrow q$: “Jorge nació en Buenos Aires $\Rightarrow$ Jorge nació en Argentina”

o también, en lenguaje coloquial:

Si Jorge nació en Buenos Aires, entonces Jorge nació en Argentina

Para determinar el valor de verdad de una implicación, vamos a ayudarnos con el siguiente ejemplo, donde un padre le promete a su hijo:

“Si te portas bien, entonces te compro un helado”. (¿Cuál es la proposición p y cuál es la q ?)

¿En qué caso el padre no habrá cumplido su promesa? Solamente en el caso en que su hijo se porte bien y el no le compre su helado.

Queremos decir que una implicación: $p \Rightarrow q$ será **falsa** solamente cuando **p sea verdadera y q falsa**. (Porque solo en ese caso de la verdad de p no se deduce la verdad de q)

Veamos una implicación falsa:

“ $x < 20 \Rightarrow x < 10$ ” Es una proposición falsa, dado que saber que $x < 20$ no asegura que $x < 10$. Y es posible elegir un valor de x que confirme esto. (Por ejemplo: $x = 18$)

Un ejemplo como este, que muestra que una implicación es falsa, se llama **contraejemplo**.

Ejercicio 7: Determinar si las siguientes implicaciones son V o F. Escribir un contraejemplo cuando corresponda.

- a) $\forall x \in R, x > 20 \Rightarrow x > 10$
- b) Pablo nació en Argentina $\Rightarrow$ Pablo nació en Castelar
- c) a es un número par $\Rightarrow a$ es múltiplo de 2
- d) Si $x > y$ entonces $x \geq y$, siendo x, y reales
- e) Si $x \leq y$ entonces $x < y$, siendo x, y reales
- f) $\forall x \in R, x < 10 \Rightarrow x < 7$
- g) $\forall a \in R, a^2 > 0$ implica que $a > 0$

Ejercicio 8: Completar las siguientes proposiciones con $\Rightarrow$ o $\Leftarrow$ de modo que resulten proposiciones verdaderas.

- a) x es un cuadrilátero.... x es un cuadrado
- b) El triángulo T es equilátero..... T es isósceles.
- c) $a^2 > 0$ $a > 0$, siendo a un número real
- d) $a \geq b$ $a > b$, siendo a y b números reales
- e) Si x es argentino x es americano,

Queremos agregar algo más acerca de las implicaciones. Si $p \Rightarrow q$, sabemos que de la verdad del antecedente p se deduce la verdad del consecuente q . Por lo tanto suele decirse que p es una **condición suficiente** para q . También puede decirse que el consecuente q es **condición necesaria** para p .

Así, la implicación:

X es un cuadrado $\Rightarrow X$ es un rectángulo

puede escribirse:

X es un cuadrado es condición suficiente para que X sea un rectángulo

O también,

X es un rectángulo es condición necesaria para que X sea un cuadrado.

Para finalizar con el estudio de los conectivos, veremos ahora la **doble implicación o equivalencia**.

Analicemos las proposiciones

p : a es divisible por 2

q : a es número par.

Observemos que las implicaciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ son verdaderas. Esto puede resumirse en una sola expresión escribiendo $p \Leftrightarrow q$.

Decimos, en este caso, que p *equivale a* q , o también que hay una *doble implicación* entre p y q . Es importante entender que si tenemos una equivalencia entre las proposiciones p y q , entonces p y q son dos modos de decir lo mismo.

Implicaciones relacionadas entre si

Dada la implicación $p \Rightarrow q$ (que llamaremos directa) es posible considerar otras 3 implicaciones que pueden construirse a partir de ella, que son:

la recíproca :	$q \Rightarrow p$
la contraria :	$\sim p \Rightarrow \sim q$
la contrarrecíproca :	$\sim q \Rightarrow \sim p$.

Veamos un ejemplo:

Dada la proposición directa ($p \Rightarrow q$): “Si un número entero x es múltiplo de 4 entonces es múltiplo de 2” (siendo p : x es múltiplo de 4 y q : x es múltiplo de 2)

La proposición **recíproca** ($q \Rightarrow p$) es: “Si un número entero x es múltiplo de 2 entonces es múltiplo de 4”

La proposición **contraria** ($\sim p \Rightarrow \sim q$) es: “Si un número entero x no es múltiplo de 4 entonces no es múltiplo de 2”

La proposición **contrarrecíproca** ($\sim q \Rightarrow \sim p$) es: “Si un número entero x no es múltiplo de 2 entonces no es múltiplo de 4”

Ejercicio 9: Escribir las proposiciones: recíproca, contraria y contrarrecíproca, y determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes implicaciones.

- a) Si n es múltiplo de 6, entonces n es múltiplo de 2 y de 3.
- b) Ser argentino implica ser lujanense.
- c) Si x es un cuadrado entonces los lados de x son iguales.

Es posible demostrar (nosotros no lo haremos) que una implicación y su contrarrecíproca siempre comparten el valor de verdad: o son ambas verdaderas o ambas son falsas.

Una introducción al estudio de las *Demostraciones*

- ¿Será verdadera la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, cualesquiera sean los números a y b ?

Observemos que puede establecerse la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &\underbrace{=}_{\text{Definición}} (a + b)(a + b) \underbrace{=}_{\text{Prop. distributiva}} a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \underbrace{=}_{\text{Prop. conmutativa}} \\ &= a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Esta cadena de igualdades garantizada por las propiedades distributiva y conmutativa nos muestra que efectivamente **la igualdad es verdadera** para cualquier par de números reales a y b . Se trata de un razonamiento que justifica, sin duda alguna, que la propiedad dada es verdadera.

Un razonamiento de este tipo se llama **demostración**.

Veamos otro ejemplo. ¿Será verdadero que, para a y b números reales,
 $a - b = 5 \Rightarrow (a + b)^2 = 25 + 20b + 4b^2$?

Esta vez, la propiedad tiene forma de una implicación. Es común llamar, en estos casos, **hipótesis** al antecedente y **tesis** al consecuente. A toda la implicación, se la llama **teorema** en el caso que resulte ser verdadera.

Antes que nada debemos observar que, tratándose de una implicación, no hay que demostrar que la igualdad $(a + b)^2 = 25 + 20b + 4b^2$ es verdadera sino que, de la verdad de la hipótesis, es decir, de saber que $a - b = 5$, debe deducirse la verdad de la tesis: $(a + b)^2 = 25 + 20b + 4b^2$.

¿Cómo podemos demostrar esto? Una forma es la siguiente.

Vamos a partir del primer miembro de la tesis $(a + b)^2$, y utilizando la información de la hipótesis $a - b = 5$ (o sea, suponiéndola verdadera) trataremos de llegar al segundo miembro de la tesis $25 + 20b + 4b^2$.

Observemos que, de la hipótesis, puede deducirse que $a = 5 + b$ con lo cual, podemos establecer la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 & \underbrace{=}_{\text{Por hipótesis: } a=5+b} ((5 + b) + b)^2 = (5 + 2b)^2 \underbrace{=}_{\text{Definición}} \\ & = (5 + 2b) \cdot (5 + 2b) \underbrace{=}_{\text{Prop. distributiva}} 25 + 10b + 10b + 4b^2 = 25 + 20b + 4b^2 \end{aligned}$$

Esta cadena muestra que, si suponemos verdadera la hipótesis, entonces la tesis es verdadera, o sea que demuestra la implicación dada.

- Veamos otro ejemplo más. Se nos pide demostrar que: Si un número entero es par, entonces su cuadrado también lo es.

La propiedad puede escribirse simbólicamente:

$$“a \text{ es un número par}” \Rightarrow “a^2 \text{ es un número par}”$$

Vemos que la hipótesis H es: *a es un número par*

y la tesis T es: *a² es un número par*

Y puede ayudarnos lo siguiente: si un número a es par, podemos decir que existe algún número entero n de modo que puede escribirse como $a = 2n$.

Para elaborar una demostración de la propiedad anterior, analicemos ahora las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} a \text{ es un número par} & \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: a = 2n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: a^2 = (2n)^2 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: a^2 = 4n^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: a^2 = 2 \cdot (2n^2) \Rightarrow a^2 = 2h \text{ con } h = 2n^2 \text{ y, por lo tanto } h \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 \text{ es un número par} \end{aligned}$$

Queda demostrado, entonces, que partiendo de la hipótesis H puede deducirse la tesis T.

Hemos dicho, anteriormente, que una implicación de la forma “ $p \Rightarrow q$ ” y su contrarrecíproca “ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ” siempre tienen el mismo valor de verdad. Por esto, para demostrar un teorema enunciado en el formato “ $p \Rightarrow q$ ”, podemos demostrar su teorema contrarrecíproco, “ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ”, que equivale al primero. A esta forma de demostrar una proposición o teorema se la suele llamar **demostración por reducción al absurdo**, y consiste, entonces, en asumir la validez de la proposición “ $\sim q$ ” para arribar a la validez de la proposición “ $\sim p$ ”. Decimos que se “suele” llamar “por reducción al absurdo” a la demostración de una proposición abordada desde la intención de *demostrar su enunciado contrarrecíproco* porque, esencialmente, se tratan de dos métodos distintos, pese a que tienen cierta (muchacha) similitud. Como no entraremos en detalles acerca de las diferencias que existen entre

ambos enfoques de una demostración consideraremos, en el marco de nuestro trabajo, como *reducción al absurdo*, a ambos procedimientos.

Veamos un ejemplo de cómo demostrar una proposición a partir de demostrar su enunciado contrarrecíproco cosa que, además, nos representa un ejemplo más de cómo llevar adelante una demostración. Lo que es importante es tener en cuenta que, las demostraciones de las proposiciones que hemos presentado en el texto, no representan la única forma de demostrar dichas proposiciones. Puede haber más de un modo de demostrar y, también, de presentar una demostración para una misma proposición.

Como ejemplo, entonces, demostrar la siguiente proposición enunciada para un número entero a :

(*) “Si $a^2 + 2a$ es un número impar, entonces, a es un número impar”

En esta proposición, escrita en la forma “ $p \Rightarrow q$ ” tenemos que

p es la proposición: “ $a^2 + 2a$ es un número impar” y

q es la proposición: “ a es un número impar”

Demostrar la validez de la proposición (*) es equivalente, como dijimos, a demostrar la validez de su afirmación contrarrecíproca “ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ”

En este caso, “ $\sim p$ ” sería la afirmación: “ $a^2 + 2a$ es un número par” y “ $\sim q$ ” diría: “ a es un número par”

Para demostrar la proposición (*) demostraremos, entonces, su proposición contrarrecíproca, es decir, demostraremos la validez de la afirmación (CR) que dice

(CR) “Si a es un número par, entonces, $a^2 + 2a$ es un número par”

Para demostrarlo partimos, entonces, de suponer que a es un número entero par (es decir, de asumir que estamos en la situación planteada por “ $\sim q$ ”).

Veamos cómo sería una posible demostración en este caso:

Demostración:

Si a es un número entero par, entonces, existe un número entero k de modo que puede escribirse: $a = 2k$. Entonces, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ y así, entonces, se tiene que $a^2 + 2a = 4k^2 + 2 \cdot 2k = 2(2k^2 + 2k)$, es decir, $a^2 + 2a = 2(2k^2 + 2k)$, entonces, $a^2 + 2a = 2n$, con $n = 2k^2 + 2k$ que es un número entero. Entonces hemos visto que, existe un número entero n de modo que $a^2 + 2a = 2n$ y, entonces, $a^2 + 2a$ es un número entero par.

Hemos probado, así, que es válida la afirmación: “Si a es un número entero par, entonces, $a^2 + 2a$ es un número entero par”, que no es otra cosa que la implicación contrarrecíproca (CR) de la proposición (*) que se nos había pedido demostrar. Por lo tanto, dada la equivalencia entre ambos enunciados (proposiciones) queda probado, a través de lo que mencionamos como *método de reducción al absurdo*, que es válida proposición (*): “Si $a^2 + 2a$ es un número impar, entonces, a es un número impar”.

Si escribimos en un modo *más simbólico* la demostración, tal como lo hemos hecho en las anteriores, podríamos reemplazar por el símbolo “ $\Rightarrow$ ” de la implicación, la palabra “entonces” en varios momentos de la demostración. En ese caso, podría quedar más o menos como mostramos ahora:

$$\underline{a \text{ es un número entero par}} \xRightarrow{\text{Definición de número par}} \exists k \in \mathbb{Z}: a = 2k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$\xRightarrow{\text{Reemplazando}}$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a^2 + 2a = 4k^2 + 2 \cdot 2k \xRightarrow{\text{Factor común}} \exists k \in \mathbb{Z}: a^2 + 2a = 2(2k^2 + 2k) \Rightarrow$$

$$a^2 + 2a = 2n, \text{ con}$$

$$n = 2k^2 + 2k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: a^2 + 2a = 2n \Rightarrow \underline{a^2 + 2a \text{ es un número entero par.}}$$

Proponemos que, antes de continuar con la lista de ejercicios de este trabajo práctico, se haga el intento de demostrar, a través del método del contrarrecíproco, la siguiente proposición enunciada para **un número entero k** :

Si “ $7k + 5$ ” es un número par, entonces, “ k ” es un número entero impar” (D)

Para hacerlo, sugerimos pensar (y escribir) quiénes son las proposiciones p y q de forma que la proposición (D) a demostrar pueda ser planteada en la forma “ $p \Rightarrow q$ ”, luego formular las negaciones de cada una y escribir el enunciado contrarrecíproco de (D). Una vez hecho estos pasos, comenzar con la demostración.

Ejercicio 10. Demostrar las siguientes proposiciones, enunciadas para cualesquiera sean los números reales a , b , x e y . (En algunas propiedades, solo debe pedirse que sean números enteros. Analizar en cuáles):

- a) $a + b = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 - 6a + 9$
- b) $x - y = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 + 2y$
- c) Si a es impar entonces el cuadrado de a también es impar.
- d) $x + a + 2 = 8a \Rightarrow x^2 + 3a = 49a^2 - 25a + 4$
- e) La suma de un número par y uno impar es un número impar
- f) x es impar $\Rightarrow 3x$ es impar
- g) $a + 2 = b \Rightarrow 3b + 5a = 8a + 6$
- h) n es múltiplo de 4 $\Rightarrow n$ es múltiplo de 2
- i) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- j) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- k) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejercicio 11 a) Enunciar la negación de la proposición:

“ $\forall k, m \in \mathbb{Z}, k + m$ es un número par y k es un número impar”

¿Es verdadera o falsa la proposición anterior? Justificar adecuadamente

b) Decidir si es verdadera o falsa la siguiente proposición, justificando la decisión tomada, y enunciar su negación:

“ $\exists k, m \in \mathbb{Z}: (k + m)^2$ es múltiplo de cuatro o $(k + m)^2 = (k + m) \cdot (k - m)$ ”

c) Decidir si es verdadera o falsa la siguiente proposición enunciada para números enteros p y q , justificando la decisión tomada, y enunciar su proposición contra recíproca:

“Si $p \cdot q$ es un número impar, entonces, $p + q$ es un número impar y $(3p - q)$ es un número par”

Ejercicio 12: a) decidir, justificando adecuadamente, si es verdadera o falsa la siguiente proposición $\exists x \in \mathbb{N} : 2x + 1 = 4 \vee x - 1 = 8$

b) Escribe su negación

Ejercicio 13: Dada la proposición

“ $\exists a, b \in \mathbb{R}: (a + 2b)$ es un número racional $\vee (a - 2b)$ no es un número racional”

Decidir, justificando adecuadamente, si es verdadera o falsa, y enunciar la negación de la proposición dada.

Ejercicio 14: Dada la proposición:

“Existen números reales a y b que verifican la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ”

a) decidir si es verdadera o falsa, justificando adecuadamente la decisión tomada.

b) enunciar la negación de dicha proposición.

Ejercicio 15: Dada la proposición:

“Cualesquiera sean los números reales a y b que verifican la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ”

a) decidir si es verdadera o falsa, justificando adecuadamente la decisión tomada.

b) enunciar la negación de dicha proposición.

Ejercicio 16: Dada la proposición

“ $\exists a, b \in \mathbb{R}: (a + 3b) \in \mathbb{Q} \vee (a - 3b) \notin \mathbb{Q}$ ”

Decidir, justificando adecuadamente, si es verdadera o falsa, y enunciar la negación de la proposición dada

Ejercicio 17: Dada la proposición:

“Cualesquiera sean los números reales a y b que verifican la igualdad $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ ”

a) decidir si es verdadera o falsa, justificando adecuadamente la decisión tomada.

b) enunciar la negación de dicha proposición.

Ejercicio 18: Dada la proposición

“ $\exists a, b \in \mathbb{R}: (a + 2b)$ es un número natural y $(a - 2b)$ no es un número natural”

Decidir, justificando adecuadamente, si es verdadera o falsa, y enunciar la negación de la proposición dada.