



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

Trigonometría
Trabajo Práctico 2

Elementos de Matemática Códigos (10014-11014)

Matemática Básica Código (13014)

Año 2025

Trigonometría

La trigonometría tiene más de 2000 años de antigüedad, siendo creada por los griegos para obtener mediciones precisas de ángulos y lados de triángulos. Su nombre se origina en las palabras griegas "trigonon" (triángulo) y "metría" (medición).

En este trabajo práctico estudiaremos el uso de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, es decir, triángulos que contienen un ángulo de 90 grados. En este contexto, surgen conceptos intrínsecos a la trigonometría, como el seno, coseno y tangente, entre otros. Estas funciones se vinculan directamente a cada ángulo de un triángulo rectángulo.

Los lados de un triángulo rectángulo se denominan, de manera específica: los *catetos*, que son los lados que forman el ángulo recto del triángulo y la *hipotenusa*, que es el lado opuesto al ángulo recto y, también, el más largo del triángulo.

En los triángulos rectángulos, se cumple una relación fundamental de la Geometría, conocida como el **Teorema de Pitágoras**. Este teorema establece lo siguiente:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

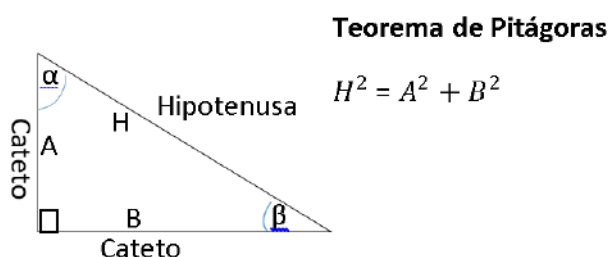
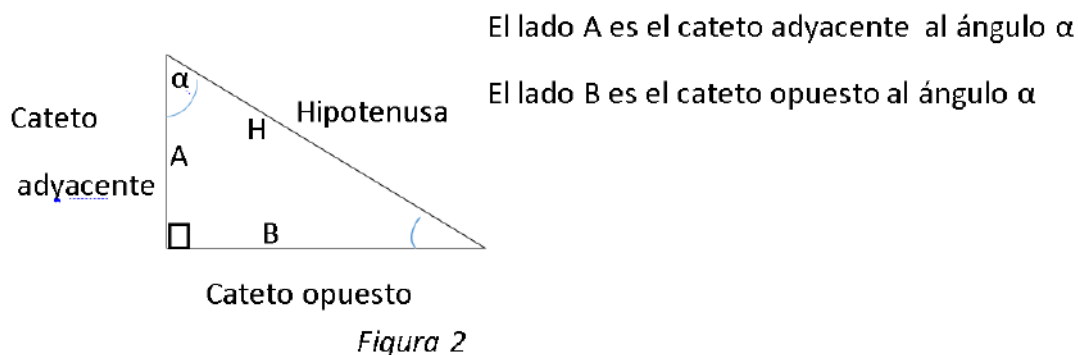


Figura 1

Si consideramos, en un triángulo rectángulo, como α a uno de sus ángulos agudos interiores los catetos del triángulo se denominan: *Cateto adyacente* y *cateto opuesto* al ángulo agudo señalado.

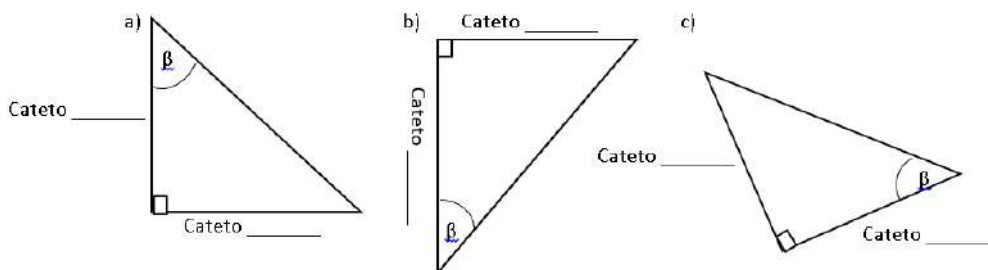
¿Cómo identificar el cateto opuesto y el cateto adyacente a un ángulo agudo en un triángulo rectángulo?

El cateto adyacente del ángulo agudo α es aquel que, junto a la hipotenusa, forma el ángulo α , mientras que el cateto opuesto al ángulo α es aquel lado del triángulo que se opone a dicho ángulo, como se muestra en la *figura 2*.



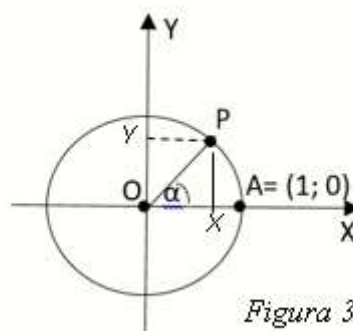
Ejercicio 1

Identificar en cada triángulo rectángulo el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo β



Funciones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Representamos en un plano un sistema de ejes cartesianos y una circunferencia de centro O, origen de las coordenadas, y radio $R = 1$. Sobre la circunferencia establecemos, además, un sistema de abscisas curvilíneas contadas a partir del punto $A = (1; 0)$ positivamente si recorremos la circunferencia en sentido antihorario y negativamente si la recorremos en sentido horario. Interpretada de esta manera, la circunferencia recibe el nombre de “Circunferencia trigonométrica”.



Si consideramos sobre la circunferencia trigonométrica un punto $P = (x; y)$ cualquiera, queda terminado un ángulo α , contado a partir del semieje positivo de las x (como muestra la **figura 3**). La abscisa x y la ordenada y del punto P se llaman, respectivamente, *coseno* y *seno* de la medida del ángulo α , que escribiremos (o notaremos) como:

$$x = \cos(\alpha)$$

$$y = \sen(\alpha)$$

Seno, Coseno y Tangente de ángulos interiores en un triángulo rectángulo

En trigonometría, los valores seno, coseno y tangente se definen, sobre los ángulos de un triángulo rectángulo y son las razones trigonométricas que más usualmente se definen sobre un ángulo.

Definimos la *tangente* de un ángulo α , ($\tan(\alpha)$), como: $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$

Nota Mientras que el seno y el coseno existen para cualquier ángulo α , la tangente existe solo para aquellos ángulos α tales que $\cos(\alpha) \neq 0$

Enunciaremos ahora algunas propiedades (conocidas como razones

Trigonométricas)

Cualquiera sea el triángulo rectángulo, si α es uno de los ángulos interiores resulta:

$$\begin{aligned} a) \text{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ b) \text{cos}(\alpha) &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ c) \tan(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}$$

Daremos una demostración de cada Propiedad:

Para demostrar las propiedades que enunciamos recién, tengamos en cuenta los triángulos rectángulos mostrados en la *figura 4*.

En dicha figura, observamos dos triángulos rectángulos: el triángulo POX y el triángulo ROM. Ambos comparten un ángulo α y, al ser triángulos rectángulos, se consideran semejantes. Por lo tanto, podemos afirmar que sus lados homólogos son proporcionales.

Esta condición nos permite plantear las siguientes relaciones entre sus lados homólogos.

Propiedad a) $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

$$\frac{PX}{PO} = \frac{RM}{RO}$$

Como la longitud del segmento PX es el valor $\text{sen}(\alpha)$ (es la abscisa del punto P), y la longitud del segmento OP es uno ($OP = 1$ por ser radio de la circunferencia trigonométrica) obtenemos, así, la siguiente relación

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{RM}{RO} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

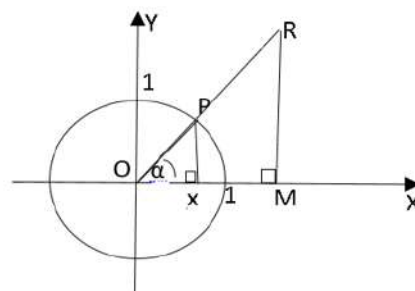


Figura 4

Es decir $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Propiedad b) $\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Para ver esa igualdad, partimos de la siguiente relación entre los lados

$$\frac{XO}{PO} = \frac{MO}{RO}$$

Como XO es el valor del $\cos(\alpha)$, y la longitud del segmento OP es **uno**, obtenemos la siguiente relación

$$\cos(\alpha) = \frac{MO}{RO} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Es decir $\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Por último la propiedad c) dice $\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Por lo tanto si relacionamos los lados

$$\frac{PX}{XO} = \frac{RM}{MO}$$

Como PX es el valor seno del ángulo α y XO es el del coseno del mismo ángulo obtenemos la siguiente relación

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{RM}{MO} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \tan(\alpha)$$

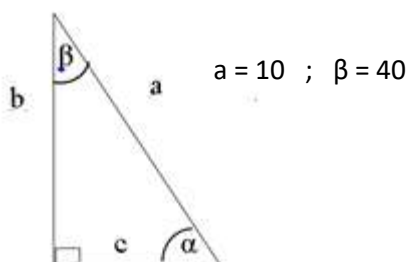
Es decir $\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Podemos observar, al analizar la *figura 4* y al graficar otros triángulos rectángulos con un ángulo de medida α , que estas relaciones no dependen del triángulo en sí, sino únicamente del ángulo establecido.

Resolución de triángulos rectángulos

A continuación, presentaremos ejemplos donde aplicaremos tanto las definiciones como las propiedades para resolver actividades que caen dentro de la categoría de problemas de resolución de triángulos rectángulos.

Problema 1: hallar todas las medidas faltantes en el siguiente triángulo, conociendo los datos indicados



Lo más sencillo de determinar en este caso es el valor del ángulo α . Dado que los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados y como, en este caso se trata de un triángulo rectángulo, se sabe que uno de los ángulos es recto, resulta que

$$\alpha + \beta = 90 \rightarrow \alpha = 50$$

Para calcular, por ejemplo, la medida del lado b , observemos lo siguiente: Los datos que se tienen son: la medida del lado a (que es la hipotenusa del triángulo dado) y el ángulo β . Nos proponemos, en este paso, hallar la medida del lado b . Para eso, nos preguntamos: **¿qué vínculo existe entre el lado b (desconocido), el ángulo β y el lado a ?** En estos tres elementos, puede observarse que: b es el cateto adyacente del ángulo β por lo que, en este momento, podríamos reformular la pregunta anterior de la siguiente manera: **¿Existe alguna relación trigonométrica que conecte un ángulo, el cateto adyacente a este ángulo y la hipotenusa del triángulo en el cual estamos considerando dicho ángulo y sus lados?**

El coseno, como señalamos, se ha definido a este valor a partir de la relación:

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos(40) = \frac{b}{10}$$

$$b = \cos(40) \cdot 10$$

$$b = 7,66$$

A partir de lo cual proponemos, como respuesta, al valor

$b = 7,66$

Para calcular, ahora, el valor de la medida del lado c , podríamos apelar al “Teorema de Pitágoras” dado que, a esta altura, conocemos las medidas de dos lados (a y b) de un triángulo rectángulo. Como el valor del lado b lo hemos “obtenido a partir de los datos”, en la medida de lo posible, para calcular cada uno de los valores que se piden en el problema, se sugiere utilizar únicamente los datos y no los valores que se van obteniendo en cada paso considerando lo que señalamos recientemente, no usaremos este recurso, ahora, para el cálculo de c . y lo dejamos para hacer al final. Luego, para obtener c , procedemos como lo hemos hecho en el cálculo anterior, preguntándonos **¿Qué función relaciona al ángulo β , la hipotenusa a del triángulo (ambos datos) y el lado c que es el cateto opuesto del ángulo β ?**

Como antes, la respuesta es sencilla: la función “seno”. En efecto, hemos definido

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{sen}(40) = \frac{c}{10}$$

$$c = \text{sen}(40) \cdot 10$$

$$c = 6,427$$

A partir de lo cual proponemos, como respuesta, al valor

$c = 6,427$

Si calculáramos al valor de la medida del lado c usando el teorema de Pitágoras, tendríamos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Reemplazando los valores dados como datos:

$$10^2 = 7.66^2 + c^2$$

Despejando el valor de c

$$c^2 = 100 - 58,67$$

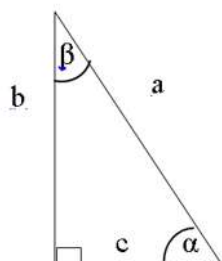
$$c^2 = 41,33$$

Considerando solo el valor positivo de c , por ser la medida de la longitud de un lado, resulta:

$$c = 6,428$$

(Con las debidas aclaraciones acerca de “la igualdad” entre el valor de c y 6, 427 y el valor de c y 6,428 los cuales deben ser interpretados en función de las aproximaciones realizadas en estos resultados).

Ejercicio 2 Sabiendo que a , b y c son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a (como podría ser el de la figura), hallar todas las medidas faltantes conociendo los datos indicados



1- $b = 4$ y $c = 3$

2- $\alpha = 45^\circ$ y $c = 2$

3- $\alpha = 30^\circ$ y $a = 1$

4- $a = 10$ y $b = 8$

La trigonometría se originó con el propósito de abordar la resolución de problemas que involucran ángulos y las longitudes de los lados de los triángulos. En este contexto, nos

centraremos en la resolución de problemas específicos, considerando algunas de las aplicaciones más relevantes relacionadas con triángulos en situaciones físicas.

Presentaremos ejemplos en los cuales mostraremos cómo aplicar tanto las definiciones como las propiedades para resolver algunas de las aplicaciones relacionadas con triángulos en situaciones físicas.

Problema 1: Podemos determinar la altura aproximada de la Torre Eiffel aplicando los principios de la trigonometría. Para hallar la altura, consideramos que un observador, desde un punto específico, dirige su mirada hacia la cima de la Torre Eiffel con un ángulo de elevación de 85 grados. La distancia desde este punto de observación hasta el centro de la base de la torre es de 28,6 metros.

Realicemos un gráfico esquemático para imaginar la situación ubicando los datos del problema sobre el gráfico. Llamaremos X a la altura de la torre.

En este caso, la altura de la torre X representa la medida del cateto opuesto al ángulo cuya medida es de 85° , tenemos como dato la longitud de la distancia desde el observador hasta el centro de la base de la torre que es de 28,6 metros, que representa en el triángulo la medida del cateto adyacente al ángulo cuya medida es de 85° .

Ahora nos preguntamos ¿hay alguna razón trigonométrica que vincule el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo de 85° ?

La tangente. Se ha definido a este valor a partir de la relación:

$$\tan(85^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{X}{28,6}$$

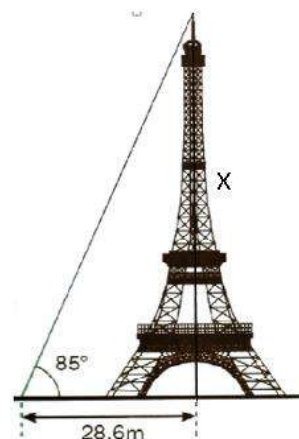
$$X = 28,6 \cdot \tan(85^\circ)$$

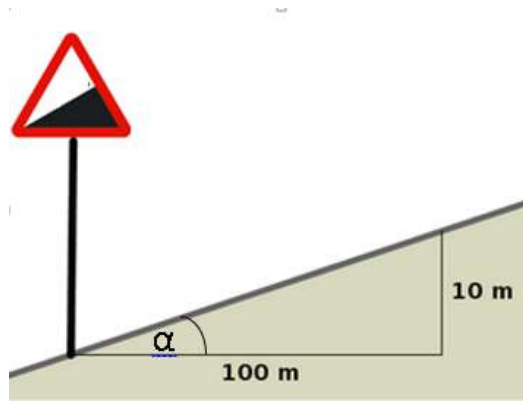
$$X = 326,90$$

Por lo tanto, podemos responder que la altura de la torre Eiffel es, aproximadamente, de 326,90 metros.

Problema 2: En el camino de las Altas Cumbres, se encuentra una señal de tráfico que indica la pendiente de la carretera. Sabemos que, por cada 100 metros horizontales recorridos, se ascienden 10 metros verticalmente. ¿Cuál es el valor aproximado del ángulo de elevación de la pendiente de la carretera en este tramo?

Realicemos un gráfico esquemático para imaginar la situación ubicando los datos del problema sobre el gráfico e identificando el triángulo rectángulo.





En este caso, los 10 metros verticalmente que se ascienden representan la medida del cateto opuesto al ángulo α , de medida desconocida, y tenemos también como dato la longitud del recorrido horizontal de 100 metros. Ahora nos preguntamos ¿hay alguna razón trigonométrica que vincule el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo α de medida desconocida?

También en este ejemplo es la tangente. Se ha definido a este valor a partir de la relación:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{10}{100}$$

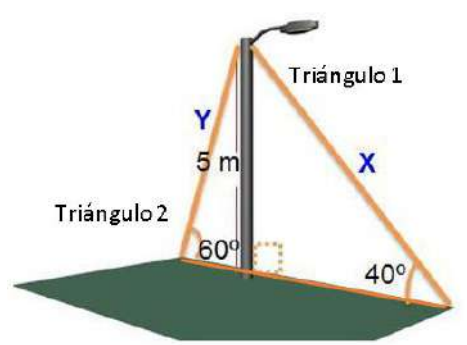
$$\tan(\alpha) = 0,1 \rightarrow \alpha = \arctan(0,1) = 5,72^\circ$$

Respuesta: el ángulo α de inclinación de la carretera es de $5,72^\circ$

Problema 3: Se busca proporcionar iluminación a un parque mediante una luminaria de 5 metros de longitud. Con el objetivo de garantizar la estabilidad y seguridad de la misma, se ha optado por fijarla utilizando dos tensores de alambres de longitudes X e Y. Estos tensores formarán ángulos de 40 y 60 grados respectivamente con respecto al suelo, ubicados en direcciones opuestas, creando así un sistema equilibrado que proporciona un soporte adecuado para la luminaria. Determinar las longitudes X e Y de los tensores de alambre necesarios para asegurar la luminaria en su posición.

Realicemos un gráfico esquemático para imaginar la situación,

ubicando los datos del problema sobre el grafico e identificando los triángulos rectángulos.



En el triángulo 1, nos proponemos hallar la medida del lado X. Nos preguntamos: ¿qué vínculo existe entre el lado X (desconocido), el ángulo de 40 grados y el lado de longitud 5? En estos tres elementos, puede observarse que: X es la hipotenusa del triángulo y el lado cuya medida es de 5 es el cateto opuesto del ángulo de 40 grados ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿hay alguna razón trigonométrica que vincule un ángulo, cateto opuesto a éste y la hipotenusa del triángulo en el cuál consideramos este ángulo y lados?

El seno se ha definido a este valor a partir de la relación:

$$\text{sen } (40^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{X}$$

$$\text{sen } (40^\circ) = \frac{5}{X}$$

$$X = \frac{5}{\text{sen } (40^\circ)}$$

$$X = 7,78 \text{ m}$$

En el triángulo 2, realizamos el mismo razonamiento para hallar el valor de la longitud del lado Y, planteando la siguiente relación

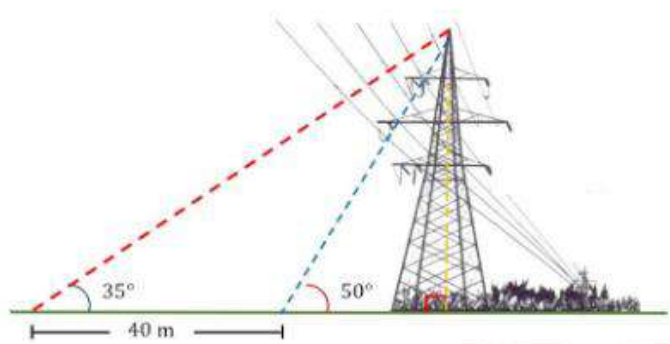
$$\text{sen } (60^\circ) = \frac{5}{y}$$

$$y = \frac{5}{\text{sen } (60^\circ)} = 5,77 \text{ m}$$

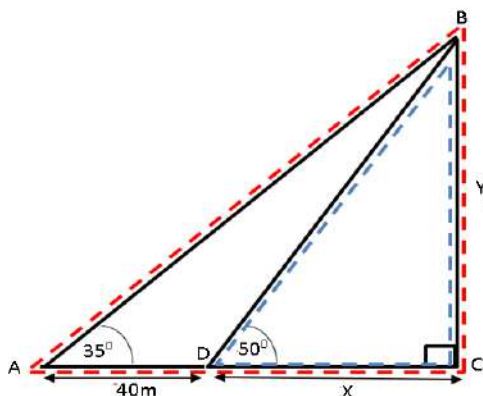
Respuesta: La longitud del lado X es $X = 7,78 \text{ m}$ y la del lado Y es $Y = 5,77 \text{ m}$

Problema 4: Desde una posición inicial en el camino, una persona observa la parte superior de una torre de alta tensión desde el suelo, con un ángulo de elevación de 35 grados. Al avanzar 40 metros en línea recta hacia la base de la torre, la persona visualiza la parte superior de la torre con un ángulo de elevación de 50 grados. ¿Cuál es la altura de la torre?

Realicemos un gráfico esquemático para imaginar la situación, ubicando los datos del problema sobre el gráfico



Se podría pensar este problema visualizando en el mismo dos triángulos rectángulos como en el siguiente gráfico:



El triángulo ACB (rojo) y el triángulo DCB (azul) en ambos el valor que representa la altura de la torre es la longitud del cateto Y

En el triángulo ACB nos proponemos, hallar la medida del lado Y. Nos preguntamos: ¿qué vínculo existe entre el lado Y (desconocido), el ángulo de 35 grados y el lado de longitud (40 + x)? En estos tres elementos, puede observarse que: Y es el cateto opuesto del ángulo de 35 grados y el lado (40 + x) es el cateto adyacente. En este momento, podríamos redefinir la pregunta anterior de la siguiente manera: ¿hay alguna razón trigonométrica que vincule un ángulo, el cateto adyacente a éste y cateto opuesto del triángulo en el cuál consideramos este ángulo y lados?

La tangente, pues se ha definido a este valor a partir de la relación:

$$\tan (35^{\circ}) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{Y}{40 + x}$$

$$\tan (35^{\circ}) = \frac{Y}{40 + x}$$

$$Y = (40 + x) \cdot \tan (35^{\circ})$$

$$Y = (40 + x) \cdot 0,7 \quad (*)$$

Ahora, en el triángulo DCB nos proponemos hallar la medida del lado Y, para lo que nos preguntamos: ¿qué vínculo existe entre el lado Y (desconocido), el ángulo de 50 grados y el lado de longitud X? En estos tres elementos, puede observarse que: Y es el cateto opuesto del ángulo de 50 grados y el lado X es el cateto adyacente. En este momento, podríamos redefinir la pregunta anterior de la siguiente manera: ¿hay alguna razón trigonométrica que vincule un ángulo, el cateto adyacente a éste y cateto opuesto del triángulo en el cuál consideramos este ángulo y lados?

Nuevamente la tangente, dado que se ha definido ese valor como:

$$\tan (50^{\circ}) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{Y}{X}$$

$$\tan (50^{\circ}) = \frac{Y}{X}$$

$$Y = X \cdot \tan (50^{\circ})$$

$$Y = X \cdot 1,19 \quad (**)$$

Igualando los valores de Y en (*) y (**) nos queda

$$X \cdot 1,19 = (40 + X) \cdot 0,7$$

Resolviendo la ecuación

$$X \cdot 1,19 = 28 + 0,7X$$

$$X \cdot 1,19 - 0,7X = 28$$

$$0,49 X = 28$$

$$X = \frac{28}{0,49} = 57,14$$

para calcular el valor de Y reemplazamos en (**)

$$Y = 57,14 \cdot 1,19 = 68$$

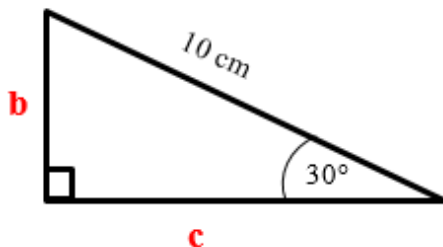
Respuesta: La altura de la antena es de, aproximadamente, 68 metros

Problemas de aplicación

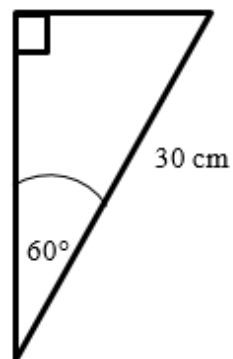
Ejercicio 3:

Calcular el área y el perímetro de los siguientes triángulos rectángulos

a)



b)



Ejercicio 4:

Una escalera de 7 metros de longitud se apoya en una pared, de manera que forma un ángulo de 60° con el piso.

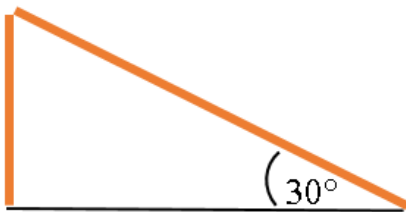
¿A qué distancia de la pared se encuentra el pie de la escalera?

¿A qué altura de la pared está apoyada la escalera?

Ejercicio 5:

Un poste de 7 metros de altura se quiebra y su parte superior cae al piso, formando un triángulo rectángulo tal como se observa en la figura

¿A qué altura del poste se produce la rotura?

**Ejercicio 6:**

Un agrimensor ubicado en la calle, a 84 metros de un edificio, determina que el ángulo desde esa posición hacia la cima de ese edificio es de 48° . Calcular la altura del edificio.

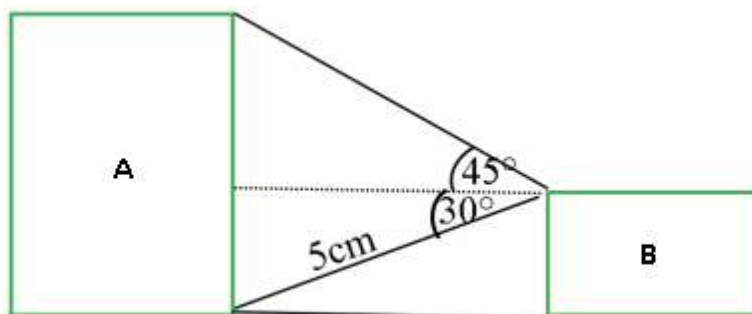
Ejercicio 7:

El ángulo de elevación desde un barco hasta la cima de un faro es de 30° . Si la altura de dicho faro es de 54 metros

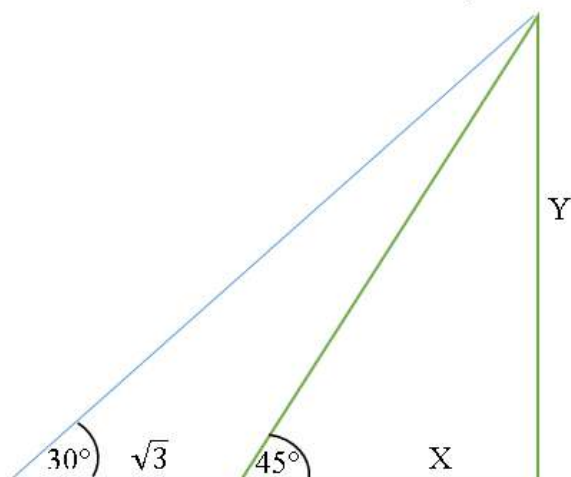
¿A qué distancia del faro se encuentra el barco?

Ejercicio 8:

Hallar el área de cada rectángulo A y B de base 2 cm sabiendo



Ejercicio 9: Calcular los valores de las longitudes de los lados X e Y



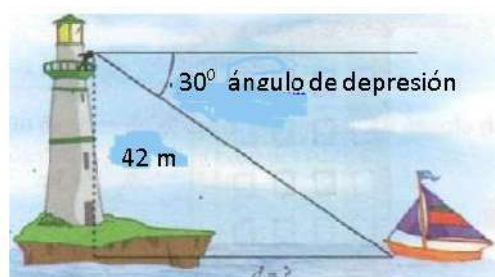
Ejercicio 10:

Una Hormiga se encuentra a cierta distancia del pie de un árbol. El ángulo de elevación de ña hormiga a la cima del árbol es de 45° , pero cuando se aleja 30 metros el ángulo de elevación disminuye a 30° ¿cuál es la altura del árbol?

Ejercicio: 1 1

Se sabe que una rampa de 3m de largo, se utiliza para subir 1,5m de altura. Calcular el ángulo que forma la rampa con el piso

Ejercicio 12: Un faro, con una altura de 42 metros, proyecta un rayo de luz que forma un ángulo de depresión de 30° con la horizontal al iluminar un velero. Se busca determinar la distancia a la que se encuentra el velero del faro



Ejercicio13: En una ciudad, un edificio y un árbol se encuentran a una distancia de

20 m. Se sabe que una persona puede observar desde la cima del edificio a la parte superior del árbol con un ángulo de depresión de 60° , y que una persona desde la base del edificio, la puede observar con un ángulo de elevación de 30° . ¿Cuánto miden el árbol y el edificio

Ejercicio 14: Calcular el perímetro de la figura ABEDC, sabiendo que el lado AB mide 4 cm más que el lado AC y que el perímetro de la figura ABCD es 48 cm.

