



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

Conjuntos numéricos

Trabajo Práctico 1

(Elementos de Matemática

Códigos 10014-11014

Matemática Básica

Código 13014)

Año 2025

Conjuntos y números reales

Los números y los conjuntos que los contienen

A lo largo del curso trabajaremos, en distintos contextos, con el conjunto de los números reales, que se lo nota con la letra $\mathbb{R}$. Dentro de este conjunto, se distinguen otros tipos de números, cada uno con características propias y que juntos, unos y otros, conforman todo $\mathbb{R}$. Estos números que mencionamos, se agrupan en conjuntos, dentro de los cuales todos comparten las mismas características. Tales conjuntos numéricos son: los números naturales, que se los nota con la letra $\mathbb{N}$, los números enteros, denotados como $\mathbb{Z}$, los números racionales $\mathbb{Q}$, y los números irracionales.

En este texto trataremos de describir brevemente algunas características de cada uno de estos conjuntos numéricos, entendiendo que lo único que haremos es recordar estas características, porque ya pueden ser consideradas conocidas por haberlas estudiado o usado a lo largo de todos los años de estudio previos a la lectura de este texto.

Antes de comenzar con la descripción de cada uno de los mencionados conjuntos, veamos cuáles son las reglas que rigen las operaciones o “el funcionamiento”, en general, de los números reales, puesto que cada conjunto numérico que hemos mencionado, más allá de sus características propias, son conjuntos de números reales.

Las propiedades que definen a los números reales.

Los números y las operaciones que pueden efectuarse entre ellos están regidos por una gran cantidad de propiedades. Muchas de estas podremos demostrarlas o podremos encontrarlas demostradas en algún texto, pero hay otras que, por ser “básicas” no podremos demostrar, o mejor dicho, no admiten demostración y, por lo tanto, debemos asumirlas como las que rigen en todo $\mathbb{R}$, y serán aquellas que nos permitirán demostrar todas las otras propiedades. Entre las propiedades básicas, encontramos algunas muy conocidas, como la “conmutativa” o la “asociativa”, mientras que entre las otras, las “deducibles”, hay muchas que también tienen nombres que las caracterizan: la *diferencia de cuadrados*, que expresa que $(x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + y)$ ó, el *cuadrado de una diferencia* que afirma $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, ambas válidas para cualquier par de números reales x e y .

¿Cómo sabremos cuáles debieran o pueden demostrarse y cuáles no? Una forma es conociendo cuáles son las *propiedades básicas* o *axiomas*, dado que estas son muy pocas.

Veamos entonces cuáles son estas propiedades básicas, que son aquellas que rigen las operaciones de **suma** y **producto** de números reales, así como el **orden** que hay en los números reales.

Propiedades básicas o axiomas de los números reales

Sobre la suma y el producto

La suma y el producto de números reales tienen resultado único y verifican las siguientes propiedades, que indicamos con las letras S y P a las referidas a la suma y al producto respectivamente:

- **Propiedad conmutativa de la suma y del producto**

Para cualquier par de números reales a y b vale:

$$S_1: a + b = b + a$$

$$P_1: a \cdot b = b \cdot a$$

- **Propiedad asociativa de la suma y del producto**

Para cualquier par de números reales a , b y c vale:

$$S_2: (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$P_2: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- **Existencia del elemento neutro para la suma y el producto**

S_3 : Existe un número real, que es el que llamamos **cero** y notamos **0** que verifica, para cualquier número real a :

$$a + 0 = a$$

P_3 : Existe un número real, que es el que llamamos **uno** y notamos **1** que verifica, para cualquier número real a :

$$a \cdot 1 = a$$

- **Existencia de los elementos opuestos para la suma y para el producto**

S_4 : Para cualquier número real a , existe un número real que notamos $(-a)$, y que llamamos el **opuesto** o **inverso aditivo de a** , que verifica

$$a + (-a) = 0$$

P_4 : Para cualquier número real $a \neq 0$, existe un número real que notamos a^{-1} , y que llamamos el **inverso multiplicativo de a** , que verifica

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ y lo llamaremos simplemente el inverso de } a)$$

- **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma**

SP : Cualesquiera sean los números reales a , b y c , se verifica

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Sobre el orden

Entre los números reales hay definida una relación de orden que se indica, a partir de los signos “menor” ($<$) o “mayor” ($>$), como: $a < b$ (“ a es menor que b ”), que también puede escribirse del modo $b > a$ (“ b es mayor que a ”). Esta relación entre números reales verifica las siguientes propiedades, que mencionamos con la letra O por tratarse del orden:

- O_1 : **Ley de Tricotomía**

Dados dos números reales a y b , se verifica entre ellos solamente una de las siguientes tres posibilidades:

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b$$

- O_2 : **Propiedad transitiva**

Dados tres números reales a , b y c , si se verifica que $a < b$ y, también, que $b < c$, entonces, se verifica que $a < c$.

- O_3 : **“Monotonía” de la suma**

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, entonces, se verifica que $a + c < b + c$ para **cualquier número real** c .

- O_4 : **“Monotonía” del producto**

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, entonces, para cualquier número real c **mayor que cero** se verifica que $a \cdot c < b \cdot c$.

NOTA: la propiedad O_3 expresa que una desigualdad **no modifica** “su sentido” si se suma un mismo **número real cualquiera** a ambos miembros de la desigualdad. En cambio, de acuerdo a lo que señala la propiedad O_4 , **no ocurre** lo mismo si se **multiplican** ambos miembros de una desigualdad por un mismo número. **Sólo se conserva el sentido** de la desigualdad si se **multiplica por un número positivo**.

De acuerdo a todo lo dicho anteriormente, estas trece propiedades son las únicas que en Matemática no son demostrables: son los axiomas que se verifican en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Por lo tanto, cualquier otra propiedad, de las muchísimas que hay, y más allá de lo simple o compleja que nos impresionen, de lo conocida o desconocida que nos resulten, serán demostrables, independientemente de que sepamos o no demostrarlas.

En vistas de lo señalado en la Nota previa, y de lo que se desprende de la lista de trece axiomas que dimos, no hay ningún axioma (propiedad básica) que señale lo que ocurre si se **multiplican ambos miembros** de una desigualdad **por un mismo número**, pero que sea **menor que cero**. Esto, entonces, quedará expresado como una propiedad que podrá demostrarse.

Propiedad

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, entonces, para cualquier número real c menor que cero se verifica que $a \cdot c > b \cdot c$.

Ejemplo

Si a y b son dos números reales tales que $a > b$, entonces $-2a < -2b$

En particular Si a y b son dos números reales tales que $a > b$, entonces $-a < -b$

A modo de ejemplo, y para ver cómo funcionan los axiomas para demostrar otras propiedades, veamos cómo hacerlo con las siguientes dos propiedades conocidas por todos.

Si bien propondremos como ejercitación, en otro momento del curso, realizar distintas demostraciones de propiedades también conocidas daremos, para ello, indicaciones de cómo realizarlas en función del formato y de las operaciones implicadas en cada una de esas propiedades. En este momento, lo que intentamos es mostrar cómo intervienen los axiomas en la demostración (justificación) de alguna propiedad elemental.

Una es la siguiente:

Si a es un número real tal que $a > 0$, entonces $-a < 0$.

Lo que se afirma en esta propiedad es que, si un número es positivo, resulta ser, entonces, que su opuesto es negativo.

La demostración es muy simple, y apela a algunas propiedades básicas. Veamos cómo se las utiliza y vinculan en los distintos pasos que se requieren para la demostración.

Demostración: Sabemos que

$$a > 0 \quad (1)$$

Por otro lado, sabemos también que, por el axioma S4, todo número real tiene su opuesto (inverso aditivo) que es $(-a)$. Además, sabemos que, por la propiedad de orden que llamamos O3 (monotonía de la suma), sumar a ambos miembros un número real cualquiera a una desigualdad, no modifica el sentido de ésta. Entonces, si en la desigualdad (1) sumamos a ambos miembros el número $(-a)$, nos queda:

$$a + (-a) > 0 + (-a) \quad (2)$$

Recurriendo a la propiedad S4, que expresa cuál es el resultado de sumar un número con su opuesto, se tiene que (2) puede escribirse como:

$$0 > 0 + (-a) \quad (3)$$

Apelando ahora a la propiedad S3, que dice cómo opera el elemento neutro de la suma, se tiene que la desigualdad (3) se convierte en

$$0 > -a$$

lo cual es equivalente a decir:

$$-a < 0$$

que es, precisamente, lo que necesitábamos probar.

En esta sencilla demostración, hemos visto cómo, a partir de saber que a es un número real positivo ($a > 0$), y utilizando adecuadamente cada una de las propiedades básicas enumeradas anteriormente, hemos podido inferir que: $-a < 0$. Esto que hemos hecho fue, entonces, la aplicación sucesiva de pasos en los cuales se apela a distintas propiedades, de forma que, todos esos pasos en conjunto logran conformar “una demostración” de la propiedad enunciada.

Resulta obvio que, de esta propiedad, también se desprende que: si $a < 0$, entonces, $(-a) > 0$, con lo que, en síntesis, lo que se afirma es que el opuesto de un número, distinto de cero, tiene, también, signo opuesto.

Otra propiedad, que no vincula desigualdades, y que por estar tan acostumbrados a utilizar tal vez no la consideremos como una propiedad “demostrable”, es la que *permite desarrollar* el cuadrado de una suma. Veamos, entonces, cuál es el enunciado, y cuál la demostración.

Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces se verifica que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

La demostración es muy sencilla, y solo apela a algunas propiedades básicas como: la propiedad distributiva SP , la propiedad asociativa de la suma S_2 y la conmutativa del producto P_1 .

Demostración:

Para demostrar esta igualdad, puede partirse de uno de los miembros de la misma, y llegar, operando a una expresión que puede ser, exactamente la misma que la del otro miembro, o “visiblemente” equivalente a ésta. En este caso, desarrollaremos la expresión que está en el primer miembro.

Por definición de potencia, sabemos que:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Apelando ahora a la propiedad distributiva SP , el segundo miembro queda escrito como:

$$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b$$

Si aplicamos ahora la propiedad conmutativa del producto, P_1 , queda:

$$(a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$$

Recurriendo ahora, nuevamente a la propiedad distributiva SP , y recurriendo a la definición de potencia, tenemos:

$$a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

Utilizando ahora la propiedad conmutativa de la suma S_1 , podemos escribir el segundo miembro como:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Como en cada paso fuimos haciendo operaciones que conservaban la equivalencia de cada resultado con $(a + b)^2$ resulta, entonces, que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que es, ni más ni menos que la igualdad que queríamos probar.

Lo que hemos visto hasta ahora, son las propiedades que rigen a todos los números reales, pero no hemos descripto aún a ninguno de los otros conjuntos numéricos que mencionamos. Veamos, a continuación, una breve descripción de cada uno de ellos, mostrando solo algunas características centrales, tal como ya lo hemos señalado anteriormente, sin entrar en detalles profundos de cada conjunto.

Los Números naturales

El conjunto de los números naturales es, si se quiere, el conjunto numérico más “elemental”, no porque no posea propiedades importantes, sino porque es el más natural de concebir: sus elementos son aquellos números que *sirven para contar*. Los números naturales son los que pertenecen al conjunto que llamamos IN, que puede describirse como:

$$\text{IN} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

Como algunas características podemos señalar, sin ser exhaustivos:

- Tiene un **primer elemento**, que es el número **uno** (el cero **no** es un número natural)
- Tiene infinitos elementos (es decir, su *cardinal*, que es la cantidad de elementos de un conjunto, es infinito)
- Cada número natural tiene un consecutivo (o siguiente): el consecutivo de cuatro es cinco, el de diez es once, el de un número natural arbitrario n , es el número $(n + 1)$
- Todos los números naturales tienen un *anterior*, salvo el número uno, por ser el primer elemento
- La suma y el producto de cualquier par de números naturales, da como resultado otro número natural (es decir, las operaciones de suma y producto son *cerradas* en el conjunto IN)
- La resta y el cociente, no son operaciones cerradas, por ejemplo: podemos restar dos números naturales, como 4 y 8, en ese orden, y obtenemos como resultado,

$$4 - 8 = -4$$

Que, claramente, no es un número natural. De igual modo, si dividimos esos números en el mismo orden, queda

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

que tampoco es un número natural. Es cierto también que, si hubiésemos restado y dividido en el otro orden, ambos resultados serían números naturales, pero para que una operación sea cerrada en IN, esto no puede pasar únicamente para algunos pares de números, sino que, independientemente del orden en que se hagan las operaciones, con **cualquier** par de números, debe obtenerse como resultado un número natural

- Asociado al punto anterior, se verifica también la siguiente propiedad: si m y n son dos números naturales y m es **mayor** que n , entonces, $(m - n)$ es un número natural.

Los Números Enteros

Los *números enteros*, por su parte, tienen mucha vinculación con los naturales y, en principio, terminan formando un conjunto en el que se “cierra” la operación de resta entre números naturales. Los números enteros, que como dijimos se los denota con la letra Z , forman el conjunto

$$Z = \{ \dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots \}$$

Es decir: para que un número sea entero tiene que ser: un número natural, o ser el opuesto de un número natural o ser el número cero. De este modo, observar que los números naturales forman un *subconjunto* del conjunto de los números enteros. Esto lo simbolizamos escribiendo: $\mathbb{N} \subset Z$ (el símbolo $\subset$ hace referencia a la inclusión de un conjunto en otro, en este caso, dice que el conjunto “ $\mathbb{N}$ está incluido en Z ”).

Entre los números enteros, obviamente, también están definidas las mismas operaciones que entre los naturales: la suma y el producto de números enteros da como resultado un número entero (para el producto, recordar la regla de los signos: “más por menos es menos”, “más por más es más”, y “menos por menos es más”, es decir, el producto de un número positivo por uno negativo da como resultado un número negativo, el producto de dos números positivos da por resultado un número positivo, y el resultado del producto de dos números negativos es positivo). Además, en Z también la resta de cualquier par de números enteros da como resultado un número entero, esto es: si m y n son dos números enteros, entonces $n - m$ es también un número entero (esto es, independientemente de cuál de los dos, m o n sea el mayor, como debíamos observar en $\mathbb{N}$). Pero sigue sin ser cerrada, como operación, la división: como ejemplo, puede citarse el mismo que se utilizó para ver que también en $\mathbb{N}$ ocurría lo mismo.

Tanto en $\mathbb{N}$ como en Z , puede hablarse de los números pares e impares, y ¿qué significa que un número sea par? Este concepto tiene que ver con otro más general que es el de *ser múltiplo* de un número, o el de *divisibilidad* entre números enteros. Veamos, entonces, qué significa esto, cosa que haremos en la siguiente definición.

Definición

Dados **dos números enteros** m y n , decimos que **m es múltiplo de n** si hay algún otro **número entero** k de modo que m pueda escribirse como:

$$m = k.n$$

(es decir, si m es el resultado de multiplicar a n por algún otro número entero).

De este modo, por ejemplo, podemos afirmar (cosa que ya sabemos) que 8 es múltiplo de 4, dado que puede escribirse $8 = 2.4$, es decir, en este caso, el entero k es $k = 2$.

Del mismo modo, 1029 es múltiplo de 7, pues $1029 = 147.7$, con lo cual, en este caso es $k = 147$, que es un número entero.

Por otro lado, 16 **no es** múltiplo de 9, pues **no hay número entero** que multiplicado por 9 dé como resultado 16 ($9 \cdot 1 = 9$, y $9 \cdot 2 = 18$, con lo cual, habría que multiplicar a 9 por un número entre 1 y 2 para que dé resultado 16, y entre 1 y 2 **no hay** números enteros).

Volviendo a los números **pares**, digamos que los números pares son aquellos que son múltiplos de dos. De este modo, por ejemplo, 24 es un número par, porque es $24 = 12 \cdot 2$, y 12 es, obviamente, un número entero. También aplica el concepto a los números enteros negativos, por ejemplo, (-34) es par, pues se lo escribe como $-34 = -17 \cdot 2$. Con la misma idea que anteriormente mostramos que 16 no es múltiplo de 9, puede verse que, por ejemplo, 17 no es un número par.

Los números enteros que no son pares, son los números impares, como el 17, y como cualquier otro número que no sea múltiplo de dos.

Cuando decimos que un número **m es múltiplo de n** , o que **n es factor de m** , estamos diciendo también, de manera equivalente, que el número **n es un divisor de m** o que **n divide a m** .

Los números enteros tienen características idénticas a los números naturales, agregando, en este caso, que Z es un conjunto que **no** tiene primer elemento, y que en Z la *resta* (o *diferencia*) es una operación cerrada.

Los números racionales

Como ya señalamos, tanto en los números naturales como en los enteros, la división (el *cociente*) no es una operación cerrada, es decir, hay pares de números enteros que si se los divide, como resultado no da un número entero. Así como los *enteros* resolvieron el problema de la *resta*, es el conjunto de los números racionales el que se encargará de “cerrar” la operación cociente.

Una primera definición de los *números racionales*, es la que señala que son aquellos números que pueden expresarse como un cociente de números enteros, con denominador distinto de cero. De este modo, puede decirse que un número n es un *número racional*, si existen números **enteros** p y q , **con $q \neq 0$** de modo que pueda escribirse:

$$n = \frac{p}{q}$$

Atendiendo a “la regla de los signos”, y sabiendo que tanto p como q son números enteros y que, por lo tanto, pueden ser mayores o menores que cero (o incluso también $p = 0$), resulta que los números racionales pueden ser, o bien cero, o bien mayores que cero (*positivos*) o bien menores que cero (*negativos*). A partir de esta situación, es que muchos autores definen a los números racionales como cocientes $n = \frac{p}{q}$, donde p es un número entero y q un número natural (de este modo, entonces, no es necesario pedir que q sea distinto de cero). También teniendo en cuenta la regla de los signos, puede escribirse la siguiente igualdad,

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$$

en la que se indica que un “signo menos” puede adjudicarse: a toda la fracción, o al numerador, o al denominador. De este modo, por ejemplo, puede escribirse:

$$-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$$

A partir de recordar la forma en la que se opera con los números racionales (con las fracciones) resulta que el conjunto Q de los números racionales, es cerrado para la suma, la resta, el producto y el cociente, pues el resultado de realizar estas operaciones con cualquier par de números racionales, es también un número racional.

Como una observación interesante, cabe señalar que los números enteros, pueden considerarse como números racionales, pues si un número n es entero, se lo puede escribir como:

$$n = \frac{n}{1}$$

De este modo, existe una relación de inclusión entre los conjuntos que hasta ahora hemos estudiado que es la siguiente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Que establece que los números naturales son también enteros, que éstos son a su vez racionales y que todos son reales.

Otra particularidad de las operaciones entre fracciones (números racionales) es que no hay una única forma de representar a una fracción. Muchas veces, se apela a la “simplificación” del numerador con el denominador, para obtener una fracción “equivalente”, pero con numerador y denominador más pequeños. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{2.3}{2.5}$$

O también

$$\frac{3}{5} = \frac{7.3}{7.5}$$

O, del mismo modo:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \pi}{5 \cdot \pi}$$

Es decir, a una fracción se le puede multiplicar numerador y denominador por un mismo número (distinto de cero), y lo que se obtiene es otra representación de la misma fracción (es decir, se obtiene una fracción equivalente a la inicial).

Este principio es el que permite aprovechar, por ejemplo, el orden entre los números naturales, para comparar (desde el punto de vista del orden) a dos fracciones.

Por ejemplo. Es claro que

$$\frac{3}{5} < \frac{8}{5}$$

Pues se sabe que $3 < 8$ (con lo que tener tres “quintos” es menos que tener ocho “quintos”)

De manera similar, se decide fácilmente que

$$\frac{17}{15} > \frac{11}{15}$$

dado que $17 > 11$.

De este modo, vemos que conocer el modo de “ordenar” a los números naturales, nos permite ordenar este tipo de fracciones en las que los denominadores son iguales. Pero, ¿cómo decidimos cuál de los dos números es el mayor si los números son, por ejemplo, $\frac{7}{4}$ y $\frac{9}{7}$?

Sabiendo que si tuviéramos iguales denominadores, podríamos comparar los números sin inconvenientes y que, además, esto siempre podemos lograrlo obteniendo fracciones equivalentes a estas que nos resulten más convenientes, apelaremos al recurso de llevar ambas fracciones a una de igual denominador, multiplicando numerador y denominador de cada una por un mismo número adecuado (que seguro no será el mismo que utilizemos en las dos fracciones).

En este caso, los denominadores son 4 y 7. Un denominador igual en ambas fracciones, podríamos lograrlo buscando multiplicar a cuatro por un número de modo de lograr un múltiplo de siete, y a siete por un número como para que el resultado sea un múltiplo de cuatro. Lo ideal sería que este “múltiplo” de siete y de cuatro que logramos, sea “el mismo número”. En nuestro ejemplo, podríamos hacer:

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{49}{28}$$

Y también:

$$\frac{9}{7} = \frac{9 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{36}{28}$$

De este modo, tenemos escrito a los números $\frac{7}{4}$ y $\frac{9}{7}$ a partir de fracciones equivalentes a ellas, con un mismo denominador, en este caso, veintiocho. Así, comparar $\frac{7}{4}$ y $\frac{9}{7}$ resulta sencillo, pues:

$$\frac{7}{4} = \frac{49}{28} > \frac{36}{28} = \frac{9}{7}$$

Es decir, observamos que

$$\frac{7}{4} > \frac{9}{7}$$

Recordando cómo se realiza la suma y resta de fracciones, podemos observar que este recurso también nos resulta útil para hacer esas operaciones.

En efecto. Conociendo la suma en los enteros, podemos calcular, mediante el procedimiento anterior, la suma o resta de fracciones.

Es fácil calcular:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$$

Pues tenemos que sumar 5 y 7 unidades de un mismo elemento: “octavos”. En este caso, resulta:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5+7}{8} = \frac{12}{8}$$

Y apelando a la simplificación (pues tanto 12 como 8 son múltiplos de 4) resulta:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3}{2}$$

Nota: a las fracciones que no tengan factores comunes en numerador y denominador como, por ejemplo, $\frac{3}{2}$ o $\frac{5}{8}$ las llamaremos *fracciones irreducibles*. No es irreducible, por ejemplo, la fracción $\frac{12}{8}$, dado que numerador y denominador tienen al número 4 como factor común.

Siguiendo con los ejemplos, si quisiéramos calcular la suma

$$\frac{7}{4} + \frac{9}{7}$$

ya no podemos apelar al mismo recurso que usamos en la suma anterior. Pero sabiendo que podemos escribir cada fracción como una equivalente a ella, de modo de tener denominadores iguales, eso será lo que hagamos (los números son los que usamos para la comparación, por lo cual ya tenemos calculada la fracción equivalente a cada una). En este caso, nos queda:

$$\frac{7}{4} + \frac{9}{7} = \frac{49}{28} + \frac{36}{28} = \frac{49+36}{28} = \frac{85}{28}$$

Es decir,

$$\frac{7}{4} + \frac{9}{7} = \frac{85}{28}$$

El mismo procedimiento, es el que puede utilizarse para calcular la resta de fracciones.

Lo que hemos hecho, no es más que mostrar una forma de justificar el procedimiento que muchos estudiantes utilizan para realizar estas operaciones que, a este nivel del estudio, todos conocen.

¿De qué otro modo identificar a un número racional, si no es a través de su representación como una fracción?

Sabemos que, por ejemplo, el número $x = 3,245$ puede también escribirse como una fracción, utilizando como numerador al número “completo” sin la *coma* y, como denominador, a la unidad (el *uno*) seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal (desde la coma hasta la última cifra distinta de cero). Es decir:

$$x = 3,245 = \frac{3245}{1000}$$

o cualquiera de las fracciones equivalentes a ésta. Así, el número $x = 3,245$ resulta ser **un número racional**.

De este modo, podemos decir que cualquier número que tiene un *desarrollo decimal finito*, resulta ser un número racional.

Por otro lado, ¿qué ocurre si el desarrollo decimal tiene infinitas cifras, pero algunas son periódicas (es decir, desde un lugar en adelante, se repite infinitamente ésta o éstas cifras)?

Por ejemplo: el número $x = 3,5555555 \dots$ es un número racional, pero ¿cuál es la fracción que lo representa? Seguramente, se recordará que hay un cálculo que escribe a los números periódicos como fracciones, y que podrán encontrar en textos de estudio del nivel medio o en apuntes de carpeta. Vamos a mostrar aquí, un procedimiento que apela al uso de una simple ecuación para expresar como fracción al número $x = 3,5555555 \dots = 3,\hat{5}$. Para eso, lo que trataremos de hacer es lograr que uno de los períodos (una de las cifras periódicas), en este caso el *cinco* “salte” de la coma hacia el otro lado, hacia la parte entera. Esto lo logramos multiplicando por la unidad seguida de ceros, tantos como para alcanzar a pasar un período. En este caso, con solo multiplicar por 10 ya pasamos una cifra periódica de la parte decimal a la parte entera del número. Hacer esta multiplicación, transformará al número dado, de período cinco, en otro número de período cinco. Veamos, entonces como seguir:

Sabemos que es

$$x = 3,5555555 \dots = 3,\hat{5} \quad (1)$$

Multiplicando ahora por diez ambos miembros, se tiene que:

$$10.x = 35,5555555 \dots = 35,\hat{5} \quad (2)$$

Si restamos miembro a miembro la expresión (1) a la expresión (2) nos queda:

$$10.x - x = 35,5555555 \dots - 3,5555555 \dots = 35,\hat{5} - 3,\hat{5}$$

Y como en el miembro derecho se tiene la diferencia entre dos números con la misma parte decimal, su resta se reduce a calcular la resta de sus partes enteras, es decir:

$$9.x = 35 - 3$$

De donde se obtiene que nuestro número x puede escribirse como

$$x = \frac{35 - 3}{9} = \frac{32}{9}$$

Con lo cual hemos deducido que

$$3,\hat{5} = \frac{32}{9}$$

Y así vemos que, efectivamente, el número *periódico* $x = 3,5555555 \dots = 3,\hat{5}$ es un número racional.

De manera análoga, se procede cuando el número es periódico, pero su parte decimal no está formada únicamente por el período. Veamos por ejemplo, cómo encontrar la fracción que representa al número $x = 2,73\hat{4}$. Del mismo modo, se trata de construir, a

partir de este número, otro (u otros) que tengan igual parte decimal, formada únicamente por un período.

Para eso, multipliquemos por alguna potencia de diez adecuada (por 10 o por 100 o por $10^3 = 1000$ según convenga) para obtener un número que tenga parte decimal periódica solamente.

En este caso, como hay dos cifras no periódicas en la parte decimal, multiplicamos, primero, por cien:

$$x = 2,73\hat{4}$$

Por lo que

$$100 \cdot x = 100 \cdot 2,73\hat{4} = 273, \hat{4} \quad (1)$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de esta última igualdad por diez (porque el período tiene únicamente una cifra, de otro modo si, por ejemplo, el período tuviera dos cifras, multiplicaríamos por cien, para que sean dos las cifras que “saltan” o “que se pasan a la parte entera”) queda:

$$10 \cdot 100 \cdot x = 10 \cdot 273, \hat{4} = 2734, \hat{4}$$

Es decir:

$$1000 \cdot x = 2734, \hat{4} \quad (2)$$

Ahora, al igual que en el ejemplo anterior, si restamos (1) de (2), nos queda:

$$1000 \cdot x - 100 \cdot x = 2734, \hat{4} - 273, \hat{4}$$

Y como se trata, en el segundo miembro, de la resta de dos números con la misma parte decimal, esta resta se reduce a la de sus partes enteras, es decir, nos queda:

$$900 \cdot x = 2734 - 273$$

Con lo cual, queda que

$$x = 2,73\hat{4} = \frac{2734 - 273}{900} = \frac{2461}{900}$$

Es decir, escribimos al número periódico como una fracción:

$$2,73\hat{4} = \frac{2461}{900}$$

En este punto, tal vez se recuerde que el procedimiento para pasar un número periódico a una fracción tenía que ver con una fracción en la que se calculaba la diferencia entre algunos números para su numerador, y como denominador se apelaba al número nueve seguido de una determinada cantidad de ceros. Como ejercicio, se propone recordar y escribirla o buscar en algún libro y verificar que el resultado al que se llega es al que se arribó con nuestro procedimiento.

También como ejercicio, proponemos que se trate de “convertir” en fracción, números periódicos que tengas características distintas a las de los ejemplos planteados como, por ejemplo, que los períodos tengan más de una cifra.

Como resumen de lo que acabamos de decir, podemos dejar expresado, entonces, que:

Los números racionales son aquellos que pueden escribirse como una fracción o que tienen desarrollo decimal finito o infinito periódico.

Los números que tienen desarrollo decimal finito, también suelen ser referidos como números con desarrollo decimal periódico pues, en estos casos, el período está dado por el cero: $x = 2,7 = 2,7000000\dots$

Si asumimos esta convención, entonces la caracterización de los números racionales queda expresada como:

Los números racionales son aquellos que pueden escribirse como una fracción o que tienen desarrollo decimal periódico.

Como características centrales del conjunto de los **números racionales**, cabe señalar el hecho que ya **no puede hablarse del consecutivo o del anterior** de un número, ya que en este contexto no existe el anterior o el siguiente de un número. Si nos preguntáramos cuál es el número que le sigue al número $x = 2,34$, como respuesta debiéramos decir: no tiene, pues en caso de tenerlo, tendríamos que ser capaces de encontrar cuál sería... ¿el número 2,341?, ¿el número 2,3401?, ¿el número 2,34001? Ninguno de ellos, porque no lo hay. La característica de poseer siguiente (consecutivo) o anterior, se pierde al “salir” de los números enteros. La característica que tienen los números racionales, es la de que *entre dos números racionales distintos existe otro número racional*.

En efecto, entre los números $x = 2,41$ e $y = 2,4101$, podemos encontrar, por ejemplo, al número racional $z = 2,41001$.

Entre los números $x = \frac{3}{7}$ e $y = \frac{4}{9}$, podemos encontrar, por ejemplo, al número $z = \frac{32}{70}$, que es también racional. En efecto. Una forma de verlo, es observando que

$$x = \frac{3}{7} = \frac{30}{70}$$

Y también

$$y = \frac{4}{9} = \frac{40}{90}$$

Y es fácil ver, ahora, que entre x e y se encuentra el número racional $z = \frac{32}{70}$ antes mencionado.

Este es otro tipo de acciones para las cuales es útil la representación de pares de números racionales en pares de fracciones equivalentes con igual denominador. Por ejemplo, para encontrar un número racional entre $x = \frac{3}{7}$ e $y = \frac{4}{9}$, podemos escribir ambos números como:

$$x = \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{27}{63} \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{28}{63}$$

Tal vez, en este caso, no nos parezca tan simple encontrar un número racional entre

$$x = \frac{3}{7} = \frac{27}{63} \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{9} = \frac{28}{63}$$

Pero podemos, aún, pensar que

$$x = \frac{3}{7} = \frac{27}{63} = \frac{270}{630} \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{9} = \frac{28}{63} = \frac{280}{630}$$

y ahora sí es fácil encontrar un número racional entre $x = \frac{3}{7} = \frac{270}{630}$ e $y = \frac{4}{9} = \frac{280}{630}$, pues podemos considerar, por ejemplo, al número $z = \frac{273}{630}$

Una propiedad que permite encontrar siempre un número racional (que no necesariamente son los que nosotros hemos hallado) entre otros dos distintos, es la siguiente:

Propiedad:

Si a y b son dos números racionales distintos y, por ejemplo, $a < b$, entonces, $z = \frac{a+b}{2}$ es un número racional entre ellos, es decir, z verifica que:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Esta propiedad expresa que dados dos números racionales distintos, su promedio es también un número racional que está entre ellos. La propiedad puede demostrarse, pero no daremos aquí su demostración, aunque ésta puede encontrarse en muchos libros o, también, puede hallarse en varios sitios de internet.

La característica que tienen los números racionales de poseer siempre un número racional entre otros dos números distintos, es la que se conoce como la *densidad* del conjunto Q . Una forma de expresar que el conjunto Q es denso es, justamente, que *entre dos números racionales distintos siempre existe otro número racional*.

Un comentario que parece interesante, es el siguiente. Ya sabemos que los números periódicos son números racionales. Esto le ocurre, entonces, al número $0,9999\dots = 0,\hat{9}$. Además sabemos que, entre dos números racionales distintos, siempre existe otro número racional. ¿Qué ocurre si nos proponemos encontrar un número racional entre $0,\hat{9}$ y 1 ? Se propone que hagan el intento de encontrarlo, con el método que les resulte más adecuado, y verán que resulta imposible encontrarlo. ¿Qué quiere decir esto entonces? Puede ser que no lo encontremos porque no sepamos hacerlo, cosa que a esta altura ya no sería cierto, o que no lo encontremos porque no lo haya. Esto último es lo que ocurre en realidad: no hay ningún número (ni racional ni irracional) entre $0,\hat{9}$ y 1 . Esto dice, nada más y nada menos, que ambos números coinciden, es decir, son el mismo número: $0,\hat{9} = 1$. Esto es así, porque si fueran distintos, por la propiedad que ya hemos enunciado (densidad) habría algún otro número entre ellos.

El camino que hemos realizado en este comentario, nos da una forma de informarnos del hecho de que $0,\hat{9}$ y 1 son el mismo número. También esto podría observarse si se apelara a algunos de los métodos que se conocen para hallar la expresión fraccionaria de un número periódico. Esta última verificación, queda como ejercicio.

Lo importante de este hecho es que, a partir de saber que $0,\hat{9} = 1$, se tienen dos formas “distintas” de expresar el desarrollo decimal de cualquier número racional de *período nueve*.

La consecuencia inmediata, es que, de esa igualdad, se desprende que todos los números enteros pueden escribirse de dos modos distintos (sin apelarse a fracciones propiamente dichas): $2,\hat{9} = 3$ por ejemplo, o también, $7,\hat{9} = 8$, entre otras igualdades posibles. Además, tenemos que

$$2,34\hat{9} = 2,35$$

O también,

$$16,5\hat{9} = 16,6$$

Todos los ejemplos que hemos desarrollado, fueron hechos con números positivos. Invitamos a que como ejercicio, cada uno se proponga un ejercicio similar al que hemos desarrollado en cada parte, utilizando números negativos.

¿Hay otro tipo de números?

Hemos mencionado que los números con desarrollos decimales finitos o con desarrollos decimales **infinitos periódicos** son números racionales. En esta “clasificación” que hemos hecho en términos de los desarrollos decimales, queda una variante que no hemos contemplado: los números que tienen desarrollos decimales **infinitos**, pero que **no son periódicos**. Evidentemente, para estos números no funciona el procedimiento de armar una fracción con un numerador formado por todo el número *sin la coma*, porque sería un numerador con infinitas cifras (esto en el caso de que las cifras no sean periódicas, porque de serlo, ya vimos como expresar al número como fracción).

Estos números, los que tienen desarrollos decimales no periódicos (con infinitas cifras no periódicas) no son números racionales: no podrán, entonces, expresarse como una fracción con numerador entero y denominador entero distinto de cero. Estos serán los números que llamaremos **irracionales**. En definitiva se tiene, como una posible definición, que:

Los números irracionales son aquellos números que no son expresables como una fracción con numerador entero y denominador entero distinto de cero.

O también:

Los números irracionales son aquellos que tienen un desarrollo decimal con infinitas cifras no periódicas.

A partir de esta definición, ¿cómo determinar algún número que sea irracional?

Sabemos (pues así lo hemos estudiado) que, por ejemplo, los números $x = \sqrt{2}$, o $x = \pi = 3,14159 \dots$ o, más en general, los números que son raíz cuadrada de un número primo, entre otros, son números irracionales. Como justificarlo, es otro problema, en el que no vamos a involucrarnos. Lo concreto, es que no sabemos cómo ver, desde nuestra definición, la irracionalidad de estos números. Pero sí, a partir de nuestra definición, podemos construir números que sean irracionales: armando números con desarrollos decimales que tengan cifras que *no se repitan* nunca, como por ejemplo:

$$x = 2,01001000100001. \dots$$

$$y = -42,12112111211112. \dots$$

$$z = 5,414124123412344123454. \dots$$

Los números irracionales, junto con los números racionales, forman el conjunto de los números reales, es decir: $\mathbb{R}$ se construye como la unión de ambos conjuntos de números, el de los racionales y el de los que no son racionales (los irracionales).

Una característica que tiene el conjunto de los números irracionales, es que ninguna de las operaciones (suma, resta, producto y cociente) son cerradas en él. A diferencia de los otros conjuntos numéricos que hemos visto, el resultado de operar entre números irracionales puede ser un número de cualquier tipo. Por ejemplo:

Si consideramos los números $x = \pi$ e $y = \pi + 1$ y calculamos la suma entre ellos, el resultado es

$$z = x + y = 2\pi + 1$$

que es un número irracional pero si, por ejemplo, hacemos la resta, nos queda:

$$w = x - y = -1$$

que resulta ser un número racional.

Lo mismo ocurre con el producto: Si, por ejemplo, $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{3}$, se tiene que, los productos:

$$x \cdot x = x^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

es un número racional, pero

$$x \cdot y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

es un número irracional.

En definitiva, el tipo de número que se obtiene al realizar cálculos con números irracionales, dependerá de cada caso en particular (los números utilizados, y las operaciones implicadas en el cálculo).

Al igual que los números racionales, los irracionales forman un conjunto denso: entre dos números irracionales distintos, puede encontrarse otro número irracional. Más aún, lo que vale es que, entre dos números irracionales distintos puede encontrarse, además, un número racional. Lo mismo ocurre entre dos números racionales distintos: además de números racionales, pueden encontrarse, también, números irracionales.

Por ejemplo: si se quiere determinar un número racional y uno irracional entre los números $x = 3,2$ e $y = \frac{19}{5}$, puede observarse, por ejemplo, que x tiene una expresión como fracción que es:

$$x = 3,2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

con lo que un número racional, puede ser, por ejemplo, $z = \frac{18}{5}$

Para buscar un número irracional entre x e y , parece más conveniente que ambos números estén expresados a partir de su desarrollo decimal. De este modo, se tiene que

$$y = \frac{19}{5} = 3,8$$

y como es $x = 3,2$ resulta que entre x e y se encuentra, por ejemplo, el número $w = 3,41411411141111\ldots$ que es irracional y está entre ambos números.

Ejercicio 1: Dadas las siguientes afirmaciones completar con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar

En el conjunto de los números racionales...

- a) cada número tiene su inverso
- b) el producto de un número distinto de cero con su inverso da uno
- c) entre el número 1 y el número 1,3 hay **solo** dos números racionales
- d) cada número tiene su consecutivo

Ejercicio 2: Dadas las siguientes afirmaciones completar con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar

En el conjunto de los números Reales...

- a) la suma y el producto tienen resultados únicos.
- b) los números con desarrollos decimales no periódicos son números irracionales.
- c) los números irracionales son aquellos números que son expresables como una fracción con numerador entero y denominador entero distinto de cero

Ejercicio 3: Escribir el símbolo $\in$ ó $\notin$ según corresponda:

$$0,34\hat{9} \dots Q, \quad \sqrt[4]{81} \dots Q, \quad \frac{7}{4} \dots Q, \quad \sqrt[3]{-8} \dots Z, \quad \pi \dots R.,$$

$$0,02 \dots Q, \quad 0,\hat{9} \dots N, \quad 2\sqrt{3} \dots Q, \quad 8/16 \dots Z, \quad -\sqrt{49} \dots N.$$

Ejercicio 4: Colocar, en cada caso, el signo que corresponda < (menor) o > (mayor) según corresponda a y b números reales cualesquiera

- a) $a < b$; $a \cdot (-3) \dots b \cdot (-3)$
- b) $a < b$; $3 \cdot a \dots 3 \cdot b$
- c) $a > b$; $-a \dots -b$
- d) $a < b$; $a + 3 \dots b + 3$
- e) $a > b$; $a : (-3) \dots b : (-3)$
- f) $a < b$; $a + (-3) \dots b + (-3)$

Potencia

Potencia con exponente natural

Si a es un número real y n un número natural mayor que 1, entonces el símbolo a^n representa el producto n veces del factor a , es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}}, \quad n \text{ natural}, \quad a \text{ es la base de la potencia, } n \text{ es el exponente o}$$

grado. Se tiene, también: $a^1 = a$, y $a^0 = 1$

Potencia con exponente entero: Si a es un número real positivo ($a > 0$), y n es un número natural, se tiene: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. De este modo, queda definida la potencia de una base $a > 0$ para cualquier exponente entero.

Algunas propiedades

Si a y b números reales positivos ($a > 0$, $b > 0$), y m y n son números enteros, entonces se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} 1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} & 2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ 3) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & 4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ 5) (a^m)^n = a^{m \cdot n} & 6) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \end{array}$$

Ejercicio 5. Realizar las siguientes operaciones, sin utilizar calculadora:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2 = & \text{b)} \left(\frac{3}{5} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = & \text{c)} \left(\frac{2}{3} \right)^7 : \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \\ \text{d)} \left(\frac{3}{7} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7} \right)^{-3} = & \text{e)} \left(\frac{2}{3} \right)^2 : \left(\frac{2}{3} \right)^3 = & \text{f)} \left(\frac{2}{3} \right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-8} \end{array}$$

Raíz cuadrada

Si a es un número real mayor o igual que cero, se dice que un número real b es la *raíz cuadrada* de a (y escribimos $\sqrt{a} = b$) si y solo si b es un **número mayor o igual que cero** cuyo **cuadrado es a** , es decir:

$$\sqrt{a} = b \text{ si y solo si } b \geq 0 \text{ y } b^2 = a$$

(Se dice también que, en estas condiciones, b es la raíz cuadrada principal de a)

Observación: Para un número no negativo a (es decir: $a \geq 0$) siempre hay dos números reales cuyo cuadrado da por resultado a : uno no negativo y otro negativo. El número no negativo cuyo cuadrado es a es, justamente, la raíz cuadrada de a . En consecuencia, el otro valor es su opuesto, que se lo nota: $-\sqrt{a}$.

Por consiguiente, se tiene como una propiedad central de la raíz cuadrada, que se desprende directamente de la definición, que:

Para todo número real $a \geq 0$, vale $\sqrt{a} \geq 0$.

Ejercicio 6: ¿qué significa $\sqrt[n]{a} = b$, para $n = 2, 3, 4, 5, \dots$? ¿Siempre se necesita que sea $a \geq 0$? Antes de responder calcular:

$$\begin{array}{llllllll} \sqrt[3]{27} = \dots & \sqrt[3]{-27} = \dots & \sqrt[4]{16} = \dots & \sqrt[4]{-16} = \dots & \sqrt[3]{0} = \dots & \sqrt[6]{1} = \dots & \sqrt[6]{-1} = \dots \\ \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \dots & \sqrt{\frac{3}{8}} = \dots & \sqrt{3} = \dots & \sqrt[3]{3} = \dots & \sqrt{-\pi} = \dots & \sqrt{\pi} = \dots \end{array}$$

Nota: de acuerdo a lo que se observa en el **Ejercicio anterior** no siempre es necesario pedir que la base sea un número estrictamente positivo. En muchas ocasiones, pueden calcularse potencias (del exponente que sea) incluso a números negativos.

Potencia con exponente racional

Sea a un número real, $a > 0$, m entero, n natural. Se define $a^{\frac{m}{n}}$ como:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos

$$9^{\frac{1}{2}} = 3 \quad ; \quad 16^{\frac{1}{2}} = 4 \quad ; \quad 27^{\frac{2}{3}} = 9 \quad ; \quad 9^{0.5} = 3 \quad ; \quad 4^{1.5} = 8$$

Ejercicio 7: Sean a y b números reales, m , n y h números naturales. (**a y b elegidos de modo que todas las operaciones que se plantean estén bien definidas**) Completar la línea de puntos expresando el resultado de dada una de las operaciones en términos de las propiedades que verifica la radicación.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \dots & \text{b)} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dots \\ \text{c)} \quad \sqrt[n]{a^m} = (\dots)^m & \text{d)} \quad \sqrt[mn]{a} = \dots \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \\ \text{e)} \quad \sqrt[nh]{a^{mh}} = \dots \sqrt[n]{a^{\dots}} \end{array}$$

Ejercicio 8: Proponer ejemplos usando números reales **a y b elegidos de modo que todas las operaciones que se plantean estén bien definidas**, m , n y h números naturales cualesquiera.

Si el **exponente es irracional**, las potencias como, por ejemplo, 5^π , o $3^{\sqrt{2}}$ se calculan mediante aproximaciones sucesivas de potencias racionales, cálculo que está fuera del alcance de nuestro curso. Para obtener un valor aproximado de una de tales potencias, puede recurrirse al uso de la calculadora

Ejercicio 9: Determinar si el resultado de las siguientes operaciones es un número racional

a) $(2 - 2\sqrt{2}) \cdot (2 + 2\sqrt{2})$	b) $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - 4\sqrt{2}}{4}$	c) $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2 + 4\sqrt{2}}{4}$
d) $(1 + 2\sqrt{3}) \cdot (2 + 3\sqrt{2})$	e) $\left(\frac{6}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1}$	f) $\frac{-1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{4}}$
g) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$	h) $\frac{4^{1.5}}{4^{2.5}}$	i) $\frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}}$

Ejercicio 10: Encontrar dos números racionales, cuando sea posible, comprendidos entre:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{7} \text{ y } \frac{5}{7} \quad \text{b)} \quad \frac{4}{7} \text{ y } \frac{5}{7} \quad \text{c)} \quad 2 \text{ y } 1, \hat{9}. \quad \text{d)} \quad -\frac{1}{2} \text{ y } 0$$

Ejercicio 11: Escribir tres ejemplos de fracciones que sean:

- a) Iguales a 1 b) menores que 1 c) mayores que 1 d) iguales a 0.

Ejercicio 12: Representar, sobre una misma recta, los siguientes números reales:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}, -1, 3; \sqrt{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; e; \pi$$

Ejercicio 13: Colocar, en cada caso, el signo que corresponda: mayor, menor o igual

- | | | |
|--|--|--|
| a) $-3 \dots -4$ | b) $-(-5) \dots 5$ | c) $0 \dots -8$ |
| d) $2 + x \dots 3 + x$ | e) $(2 + 3)^2 \dots 2^2 + 3^2$ | f) $(x+5)^2 \dots x^2 + 10x + 25$ |
| g) $-3^3 \dots -27$ | h) $-3^3 \dots 27$ | i) $-3^4 \dots 81$ |
| j) $(-3)^4 \dots 81$ | k) $(-1)^{2k} \dots 1, k \in \mathbb{N}$ | l) $(-1)^{2k+1} \dots 1, k \in \mathbb{N}$ |
| m) $2^0 \dots 1$ | n) $\pi \dots 3,14$ | o) $\frac{1}{4} \dots 0,25$ |
| p) $\frac{1}{3} \dots 0,3$ | q) $\frac{31}{15} \dots \frac{33}{17}$ | r) $-\frac{2}{3} \dots -\frac{5}{7}$ |
| s) $\sqrt{2} \sqrt{2} \dots 2\sqrt{2}$ | t) $(2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 \dots 2$ | u) $(1 - \sqrt{2})^2 \dots (\sqrt{2} - 1)^2$ |
| v) $(1 + \sqrt{2})^2 \dots 3$ | w) $1 - \sqrt{2} \dots \sqrt{2} - 1$ | x) $(5 - 3)^2 \dots 16$ |

Aplicaciones particulares de las fracciones

En las situaciones que se presentan a continuación, es necesario que se apliquen los conceptos y técnicas trabajadas hasta el momento, muchas de ellas aparecen en un contexto real.

Algunas de esas nociones implican procedimientos tales como:

- Usar la fracción como parte de una cantidad o como parte de otra parte.
- Plantear el cálculo de porcentajes para problemas de recargo o de descuento.
- Utilizar fórmulas que impliquen nociones de medida: Área, Perímetro y Volumen, y propiedades de las figuras geométricas planas y espaciales.
- Plantear ecuaciones utilizando las nociones anteriores

Te ayudamos con algo de porcentaje

Una forma de presentación de las fracciones, o una forma de aplicarlas, es a través del porcentaje. Por ejemplo, y para mostrar fracciones muy simples, cuando se habla del 50% de una determinada cantidad, se está hablando de la mitad de esa cantidad o, cuando se calcula el 25% de cierto valor, se trata de la cuarta parte de ese valor. Esto es:

Calcular el 50% de X es equivalente a calcular $\frac{1}{2}$ de X

Calcular el 25% de X es equivalente a calcular $\frac{1}{4}$ de X

En el contexto del cálculo de porcentajes, hay dos problemas (situaciones) en las cuales se concentran las dificultades: **calcular el porcentaje** de una determinada cantidad o, en otro caso, conociendo el porcentaje de una cierta cantidad, **calcular cuál es esa cantidad**.

Cálculo de un porcentaje

Una forma básica de calcular el porcentaje de una cantidad, suele ser a partir de la “regla de tres simple”, dado que el porcentaje se relaciona con la “proporcionalidad” y, la regla de tres es aplicable a situaciones que también involucran la proporcionalidad.

En este sentido, si se quiere saber cuál es el 35% de 10500, suele operarse del siguiente modo (regla de tres simple):

100%-----10500

35% ----- X

Y como es una relación de proporcionalidad, se concluye, desde aquí, que

$$X = \frac{35 \cdot 10500}{100} = \frac{35}{100} \cdot 10500$$

Y ahora solo resta hacer el cálculo del producto de fracciones planteado para saber cuánto es, finalmente, el 35% de 10500.

Como otro ejemplo, veamos ahora cómo calcular el 63% de 10500.

Para verlo, procedemos como antes, planteamos el esquema de la regla de tres simple, y nos queda:

100%-----10500

63% ----- X

De donde se concluye que:

$$X = \frac{63 \cdot 10500}{100} = \frac{63}{100} \cdot 10500$$

Nuevamente, con solo hacer el cálculo que quedó planteado, se tiene el 63% buscado.

Si observamos, en ambos casos, luego de plantear el esquema de la regla de tres simple, se llega a que el porcentaje buscado de 10500 no es otra cosa que una fracción de 10500, que queda expresado como el producto de este valor y la fracción correspondiente al porcentaje. Apelamos a estos ejemplos para mostrar que la regla que daremos a continuación para calcular porcentajes de una cantidad, efectivamente se ajusta a lo que se plantea desde la mencionada regla. Es claro que “armar” el esquema

para cada cálculo de porcentaje que tengamos que realizar, es bastante tedioso, y nos resultaría incómodo si no contamos con un lápiz y un papel a mano.

Como resumen, entonces, diremos que para calcular, por ejemplo, un valor X que signifique un porcentaje P de una cierta cantidad C , solo debemos hacer la siguiente cuenta:

$$X = \frac{P}{100} \cdot C$$

Es decir: $\frac{P}{100} \cdot C$ nos da, como resultado, “el $P\%$ de C ”.

De este modo, si se quiere calcular el 45% de 184, basta con hacer: $\frac{45}{100} \cdot 184$, y para calcular el 28% de 340, solo hacemos $\frac{28}{100} \cdot 340$.

Por otro lado, mencionamos un segundo problema al trabajar con porcentajes: si sabemos cuál es el porcentaje de una cierta cantidad, entonces ¿cuál es esa cantidad?

Por ejemplo: en una gran liquidación de productos en cierto comercio, se ha rebajado en un 30% el precio de todos los productos. Si un cierto producto se está vendiendo en 420 pesos ¿cuál era el precio antes de haberse hecho esta rebaja?

Como a todos los productos se les rebajó un 30% a su precio inicial, el precio que se cobra en esta liquidación es el 70% del valor original. En nuestro caso, sabemos que el precio que se paga por nuestro producto es \$420, por lo que, si fuese P el precio inicial, lo que tenemos es que 420 es el 70% de P . Este es, entonces, el dato con el que contamos para saber cuánto vale P . Por lo dicho anteriormente, el 70% de P es $\frac{70}{100} \cdot P$, y como esto es 420, el valor P resultará de resolver la ecuación:

$$\frac{70}{100} \cdot P = 420$$

De donde se obtiene que

$$P = 420 \cdot \frac{100}{70}$$

Con lo cual, el precio inicial del producto que en la liquidación se vende a \$420 era de 600 pesos.

De este modo, y para generalizar, podemos decir que: si un valor C representa un porcentaje P de una cantidad X , resulta que X se obtiene como solución de la ecuación:

$$\frac{P}{100} \cdot X = C$$

de donde se deduce que la cantidad X es el resultado de calcular:

$$X = C \cdot \frac{100}{P} \quad (*)$$

Para hacer los cálculos en una actividad concreta, puede apelarse directamente a esta “regla”, o recurrir al procedimiento o planteo de la ecuación, tal como lo hicimos en el ejemplo.

Para reforzar, veamos otro cálculo:

Para realizar un tratamiento médico, hay que aplicar diariamente una inyección con el 8% del contenido que trae el frasco ampolla de un medicamento. Si en cada inyección se aplican 5,6 mililitros del remedio ¿cuál es el contenido del frasco ampolla?

Si lo calculamos a partir de la ecuación, necesitamos conocer el valor X del cual 5,6 representa el 8%, es decir, necesitamos hallar el valor X que verifica la igualdad:

$$\frac{8}{100} \cdot X = 5,6$$

De lo que deducimos que el contenido X (en mililitros) que trae el frasco ampolla es el resultado de hacer:

$$X = 5,6 \cdot \frac{100}{8}$$

Que es lo que se plantea en la “fórmula” (*).

Como respuesta, el frasco ampolla trae 70 mililitros del medicamento

También en el contexto del trabajo con porcentajes, tal vez resulte útil contar con algunas “fórmulas” para calcular los valores (precios, contenidos, por ejemplo) que se obtienen cuando se incrementan esos valores en un $X\%$ o cuando, a los mismos, se le aplica un descuento del mismo porcentaje X :

- Si se **incrementa** en un $X\%$ una determinada cantidad C , el nuevo valor N que se obtiene puede calcularse haciendo: $N = C(1 + \frac{x}{100})$
- Si a una cantidad C se le **aplica un descuento** de un $X\%$, el nuevo valor N que se obtiene se calcula haciendo: $N = C(1 - \frac{x}{100})$

Ejercicio 14: Problemas

- 1- Las dos terceras partes de un número aumentadas en 1 equivalen a las cinco cuartas partes del mismo número. ¿De qué número se trata?
- 2- Se tiene un patio rectangular de dimensiones 14 m y 5 m. Se quiere embaldosar dos tercios de dicho patio. ¿Cuántos m^2 quedarán sin embaldosar?
- 3- De una ruta se ha inaugurado la tercera parte de su longitud. La cuarta parte del resto de la ruta está en construcción, y aún quedan 120 km en los cuales aún no se han iniciado las obras. ¿Cuál es la longitud de la ruta?
- 4- Las dos quintas partes de la cantidad total de libros de una biblioteca son del género *Terror*. Las tres quintas partes del resto de los libros corresponden al género *Policial*, mientras que los libros restantes son *Novelas Románticas*.
 - a) ¿Qué fracción de la cantidad total de libros de la biblioteca corresponden a las Novelas Románticas?
 - b) Si la biblioteca hubiera un total de 12.500 libros, ¿cuál es la cantidad de ejemplares de novelas policiales?
- 5- Demostrar que si a una determinada cantidad C , se la **incrementa** en un $X\%$, el nuevo valor N que se obtiene puede calcularse haciendo: $N = C(1 + \frac{x}{100})$
- 6- Un automóvil cero kilómetro de cierta marca cuesta US\$ 10.000. Si se desvaloriza a razón del 10% anual, ¿cuál será su valor transcurridos 2 años?
- 7- Se sabe que el 14% de una cierta cantidad es 518. Si dicha cantidad se aumenta en un 10% ¿Qué número resulta?
- 8- ¿Cuánto valía un artículo al cual le han descontado el 21% y ahora cuesta \$10.586?
- 9- El precio de venta de un artículo fue de \$1600, y el precio de costo de \$1040. Se adquiere un nuevo artículo para vender y se desea aplicar el mismo porcentaje sobre el precio de costo que al primero. ¿A cuánto se deberá vender si el costo fue de \$1350?
- 10- Si a cada lado de un cuadrado se lo aumenta en un 25%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?
- 11- Las longitudes de las aristas de un cubo son de 5 m. Si dichas longitudes se aumentan un 40%, ¿en qué porcentaje aumenta su volumen?
- 12- Si aumentamos cada lado de un cuadrado en 5 unidades, se obtiene un nuevo cuadrado cuya área es 81 m^2 . Calcular el perímetro del cuadrado inicial, mostrando cuál es la ecuación que se resuelve para dicho cálculo

13- Dada la propiedad “los números negativos son menores que los positivos”. Escribirla simbólicamente y analizar en base a qué propiedad o propiedades de orden se podría demostrar.

14- En una concesionaria de autos, uno de los modelos cero kilómetro cuesta US\$ 10.000. Por pago al contado la concesionaria hace un descuento del 10%.

Si el comprador elige accesorios opcionales para el auto, la concesionaria realiza un incremento adicional del 5% aplicable a cualquier forma de pago.

Una persona compró el auto con accesorios opcionales y al contado. ¿Cuánto pagará el automóvil?

15- Si aumentamos dos lados paralelos de un cuadrado en un 10%, y a los otros dos restantes los disminuimos en un 10 % se obtiene un rectángulo cuya área es mayor o menor o igual que el área del cuadrado?

16- Si a una cantidad C , se la incrementa en un 20 % y al resultado se le aplica un descuento de un 20% Al final de esta operación la cantidad C aumenta o disminuye? En qué porcentaje?

17- La empresa Asfaltix se ocupó de pavimentar la quinta parte de una avenida, pero por razones presupuestarias suspendió el trabajo por un mes. Al reanudarlo, pavimentó dos tercios de lo que faltaba y debió suspender nuevamente el trabajo

a) ¿Qué fracción falta pavimentar?

b) Si todavía faltan pavimentar 16000 metros, ¿qué largo tiene la avenida?

18- Una cadena de electrodomésticos ofrece un descuento los días **martes y jueves** en el precio de un electrodoméstico cuyo valor de lista es \$ 220000:

Martes: Si el pago es en efectivo, 10 % de descuento sobre el precio de lista.

Jueves: Si el pago es con tarjeta de crédito, se aplica un recargo del 5 % sobre el precio de lista y el banco realiza un reintegro del 15 %.

Decidir cuál de los dos días conviene, económicamente, realizar la compra. Justificar

19- El diario del domingo tiene 120 páginas, un 25% más de páginas que el del sábado.

a) ¿Cuántas páginas tiene el diario del sábado?

b) Si el diario del domingo le dedica la cuarta parte de sus páginas a la sección “Espectáculos” y la quinta parte del resto de las páginas para la sección “Internacionales”, ¿qué cantidad de páginas se le destina al resto de las secciones?