TERCER TURNO

TEMA 1

Ejercicio 1 (3 puntos)
Sea $f(x)$ la función lineal que pasa por los puntos $A = (1; -3)$ y $B = (2; 5)$.
Sea
$$g(x) = \frac{4}{x+7} - 1$$
Hallar el conjunto de ceros de la función $(g \circ f)(x)$.

Respuesta

En primer lugar debemos hallar la fórmula de la función f.
Como es una función lineal es de la forma
$f(x) = mx + b$
La gráfica de la función pasa por los puntos $A = (1; -3)$ y $B = (2; 5)$
$f(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = m \cdot 1 + b$
$f(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = m \cdot 2 + b$
Hay que resolver el sistema:
$$\begin{cases} -3 = m + b \\ 5 = 2m + b \end{cases}$$
De la primer ecuación tenemos que
$$b = -3 - m$$
Reemplazando en la segunda ecuación
$$5 = 2m + (-3 - m) \quad \Leftrightarrow \quad 5 = m - 3 \quad \Leftrightarrow \quad m = 8 \quad \Rightarrow \quad b = -11$$
Entonces
$f(x) = 8x - 11$
Luego debemos encontrar $g \circ f$:
$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(8x - 11) = \frac{4}{(8x - 11) + 7} - 1 = \frac{4}{8x - 4} - 1$$
Para encontrar el conjunto de ceros de la función de gof debemos resolver:
$$\frac{4}{8x - 4} - 1 = 0$$
$$\frac{4 - (8x - 4)}{8x - 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8 - 8x}{8x - 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Por lo tanto $C^0 = \{1\}$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1$$
$$g(x) = -x^3 + x + 11$$

Respuesta

Supongamos que las gráficas de las funciones se cortan en por lo menos un punto.

Para hallar analíticamente el valor de la abscisa del punto de intersección debemos igualar ambas funciones y resolver la ecuación

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 = -x^3 + x + 11$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 + x^3 - x - 11 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Nos queda una ecuación cuadrática igualada a cero. Para hallar la solución aplicaremos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Reemplazamos los valores de la ecuación: $a = 2$ $b = -2$ $c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2.2}$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4}$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Para hallar las ordenadas de los puntos donde se cruzan evaluamos cualquiera de las funciones en los valores de x hallados.

Para $x_1 = 3$ la ordenada del punto es $y_1 = g(3) = -3^3 + 3 + 11 = -13$, entonces el punto es $P_1 = (3; -13)$

Para $x_2 = -2$ la ordenada del punto es $y_2 = g(-2) = -(-2)^3 + (-2) + 11 = 17$, entonces el punto es $P_2 = (-2; 17)$

Los puntos de intersección son: $P_1 = (3; -13)$ y $P_2 = (-2; 17)$

Ejercicio 3 (2 puntos)
En una fábrica la función "beneficio semanal" $B(x)$ viene dada por

$$B(x) = -2(x-10)(x-40)$$

donde B es el beneficio en pesos y x la cantidad de unidades producidas.
¿Cuántas unidades deben producirse para que el **beneficio sea siempre positivo**?

Respuesta

El beneficio será siempre positivo si
$B(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-10)(x-40) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-10)(x-40) < 0$
La función beneficio $-2(x-10)(x-40) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$ ó $x = 40$
Para hallar en que conjunto de puntos el beneficio es positivo podemos analizar el signo de la función beneficio en los intervalos determinados por los ceros de dicha función:

- En el intervalo $(-\infty, 10)$ el beneficio es negativo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 1 \in (-\infty, 10)$ tenemos que $B(1) = -2(1-10)(1-40) = -2 \cdot (-9) \cdot (-39) = -702$
- En el intervalo $(10{,}40)$ el beneficio es positivo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 20 \in (10{,}40)$ tenemos que $B(20) = -2(20-10)(20-40) = -2 \cdot (10) \cdot (-20) = 400$
- En el intervalo $(40, +\infty)$ el beneficio es negativo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 50 \in (40, +\infty)$ tenemos que $B(50) = -2(50-10)(50-40) = -2 \cdot (40) \cdot (10) = -800$

Otra manera: ya que la gráfica de la función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, es positiva en el intervalo $(10{,}40)$.

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dada la función

$$f(x) = \frac{-5}{x-4} - b$$

Encontrar el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual $f(5) = -1$.
Utilizando el valor hallado, calcular dominio e imagen de la función $f^{-1}(x)$

Respuesta

Como nos dicen que $f(5) = -1$, entonces reemplazamos en la fórmula de la función para hallar el valor de b.

$$-1 = \frac{-5}{5-4} - b$$

$$-1 = \frac{-5}{1} - b$$

TERCER TURNO

$$-1+5=-b$$
$$4=-b$$
$$-4=b$$

Por lo tanto, nos queda:

$$f(x)=\frac{-5}{x-4}+4$$

Ahora nos piden hallar $f^{-1}(x)$:

$$y=\frac{-5}{x-4}+4$$
$$y-4=\frac{-5}{x-4}$$
$$(x-4)\cdot(y-4)=-5$$
$$x-4=\frac{-5}{y-4}$$
$$x=\frac{-5}{y-4}+4$$

Por lo tanto:

$$f^{-1}(x)=\frac{-5}{x-4}+4$$

$Dom(f^{-1} == \Re-\{4\}$ $\qquad$ $Imagen(f^{-1})=\Re-\{4\}$

TEMA 2

Ejercicio 1 (3 puntos)
Sea g una función lineal que cumple
$$g(2) - g(1) = 3$$
$$g(0) = -6$$
Hallar, si existen, el o los puntos de intersección entre los gráficos de la función g y la función
$$f(x) = 3(x+1)(2-x)$$

Respuesta

Como la función $g(x)$ es lineal entonces debe cumplir que $g(x) = ax + b$, teniendo en cuenta los datos dados:
$g(2) - g(1) = a2 + b - (a1 + b) = 2a + b - a - b = a$
Por otro lado $g(2) - g(1) = 3$, entonces $a = 3$
Como $g(0) = -6$ tenemos que la ordenada al origen es $b = -6$
Nos queda entonces que
$g(x) = 3x - 6$
Ahora queremos hallar, si existen, los puntos de corte entre los gráficos de g y f.
$$f(x) = g(x)$$
$$3 \cdot (x+1)(2-x) = 3x - 6$$
$$3 \cdot (2x - x^2 + 2 - x) = 3x - 6$$
$$3 \cdot (x - x^2 + 2) = 3x - 6$$
$$-3x^2 + 3x + 6 = 3x - 6$$
$$-3x^2 + 6 = -6$$
$$-3x^2 = -12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \text{ó} \ x = -2$$
Para hallar las ordenadas de los puntos donde se cruzan evaluamos cualquiera de las funciones en los valores de x hallados.
Para $x = 2$ la ordenada del punto es $g(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, entonces el punto es $P_1 = (2; 0)$
Para $x = -2$ la ordenada del punto es $g(-2) = 3 \cdot (-2) - 6 = -12$, entonces el punto es $P_2 = (-2; -12)$
Los puntos de intersección son: $P_1 = (2; 0)$ y $P_2 = (-2; -12)$

Ejercicio 2 (2 puntos)
La aceleración con la cual se propaga una enfermedad en el tiempo está dada por la fórmula
$$A(t) = 20 - 5(t-2)^2$$
donde t representa el tiempo que debe considerarse siempre mayor o igual que cero.
¿Para qué valores de t la aceleración será positiva?

Respuesta

La aceleración será positiva si

$$A(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - 5(t-2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 > 5(t-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > (t-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4} > \sqrt{(t-2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 > |t-2|$$

Luego

$$|t-2| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < t-2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < t < 4$$

La aceleración será positiva para valores de $t \in (0,4)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los valores de $a, b \ \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$P(x) = ax^3 - 5bx$$

$$Q(x) = (b-2a)x - 4$$

cumplen las siguientes relaciones

$$2P(1) + Q(4) = 0$$

$$P(0) - Q(1) = 0$$

Respuesta

Vamos a evaluar los polinomios en cada uno de los puntos involucrados:

$$P(1) = a \cdot 1^3 - 5b \cdot 1 = a - 5b$$

$$P(0) = a \cdot 0^3 - 5b \cdot 0 = 0$$

$$Q(1) = (b-2a) \cdot 1 - 4 = b - 2a - 4$$

$$Q(4) = (b-2a) \cdot 4 - 4 = 4b - 8a - 4$$

$$P(0) - Q(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - (b - 2a - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a + 4$$

$$2P(1) + Q(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(a - 5b) + 4b - 8a - 4 = 0$$

$$2a - 10b + 4b - 8a - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6a - 6b - 4 = 0$$

Reemplazando el valor de b

$$-6a - 6(2a+4) - 4 = 0$$

$$-6a - 12a - 24 - 4 = 0$$

$$-18a - 28 = 0$$

$$a = -\frac{14}{9} \qquad y \qquad b = 2\left(-\frac{14}{9}\right) + 4 = -\frac{28}{9} + 4 = \frac{8}{9}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2}{3-x} + a \qquad g(x) = -x+1$$

se sabe que $(f \circ g)(0) = 2$. Hallar la expresión de $(f \circ g)(x)$ y, si existe, la ecuación de la asíntota vertical de $(f \circ g)(x)$.

Respuesta

Primero debemos hallar el valor de $\boldsymbol{a}$ sabiendo que $(f \circ g)(0) = 2$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(-x+1) = \frac{2}{3-(-x+1)} + a = \frac{2}{2+x} + a$$

$$(f \circ g)(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2+0} + a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2}{2+x} + 1$$

Para que la función $f \circ g$ esté bien definida

$$2 + x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2$$

$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Para afirmar que $x = -2$ es una asíntota vertical el límite de la función cuando x tiende a -2 debe ser infinito

$$\lim_{x \to -2} \frac{2}{2+x} + 1 = \lim_{x \to -2} \frac{2+(2+x)}{2+x} = \lim_{x \to -2} \frac{4+x}{2+x} = \infty$$

Entonces $x = -2$ es la asíntota vertical.

TEMA 3

Ejercicio 1 (3 puntos)
Hallar la intersección entre los conjuntos A y B siendo

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ } tales\ que \ \left|x+\frac{1}{2}\right| > 1\right\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ } tales\ que\ |x| < 2\}$$

Respuesta

Si $x \in A$

$$\left|x+\frac{1}{2}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{2} > 1 \quad ó \quad x+\frac{1}{2} < -1$$
$$x+\frac{1}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$
$$x+\frac{1}{2} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

Luego

$$A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

Si $x \in B$

$$|x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2,2)$$

Luego $B = (-2,2)$
Entonces

$$A \cap B = \left[\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)\right] \cap (-2,2) = \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Ejercicio 2 (2 puntos)
El costo (expresado en pesos) para producir x unidades de un nuevo producto de limpieza esta definido como $C(x) = 1200 - bx$.
Se sabe que el costo de 100 unidades es de $600. ¿Cuántas unidades serán necesarias producir para que el costo sea menor o igual a $420?

Respuesta

Se sabe que el costo de 100 unidades es de $600, entonces

$$C(100) = 600$$

$$1200 - b \cdot 100 = 600 \quad \Leftrightarrow \quad -100b = 600 - 1200 \quad \Leftrightarrow \quad -100b = -600 \quad \Leftrightarrow \quad b = 6$$

Se tiene que $C(x) = 1200 - 6x$

El costo será menor o igual a \$420 si y sólo si

$$1200 - 6x \leq 420 \quad \Leftrightarrow \quad -6x \leq 420 - 1200 \quad \Leftrightarrow -6x \leq -780 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 130$$

Se deberán producir por lo menos 130 unidades para que el costo sea menor o igual a \$420

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{2}{2x - 3} - 1$$

Hallar la función $f^{-1}(x)$ y su dominio

Respuesta

Hallamos f^{-1}:

$$\frac{2}{2x - 3} - 1 = y$$

$$\frac{2}{2x - 3} = y + 1$$

$$\frac{2}{y + 1} = 2x - 3$$

$$\frac{2}{y + 1} + 3 = 2x$$

$$\frac{1}{y + 1} + \frac{3}{2} = x$$

Entonces

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{2}$$

La función inversa está bien definida si $x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$

Entonces $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$g(x) = 1 - 2x$$

Hallar la función $(f \circ g)(x)$. Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

Respuesta

La función $f \circ g$ es:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(1-2x) = \frac{2}{(3-(1-2x))^2} = \frac{2}{(2+2x)^2}$$

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{(2+2x)^2} = 0$$

En $y = 0$ hay una asíntota horizontal.

TEMA 4

Ejercicio 1 (3 puntos)
Dada la función
$$f(x) = \frac{-5}{x-4} - b$$
Encontrar el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual $f(5) = -1$.
Utilizando el valor hallado, calcular dominio e imagen de la función $f^{-1}(x)$

Respuesta

Como nos dicen que $f(5) = -1$, entonces reemplazamos en la fórmula de la función para hallar el valor de b.
$$-1 = \frac{-5}{5-4} - b$$
$$-1 = \frac{-5}{1} - b$$
$$-1 + 5 = -b$$
$$4 = -b$$
$$-4 = b$$
Por lo tanto, nos queda:
$$f(x) = \frac{-5}{x-4} + 4$$
Ahora nos piden hallar $f^{-1}(x)$:
$$y = \frac{-5}{x-4} + 4$$
$$y - 4 = \frac{-5}{x-4}$$
$$(x-4) \cdot (y-4) = -5$$
$$x - 4 = \frac{-5}{y-4}$$
$$x = \frac{-5}{y-4} + 4$$
Por lo tanto:
$$f^{-1}(x) = \frac{-5}{x-4} + 4$$
$Dom(f^{-1} == \Re - \{4\}$ $\qquad$ $Imagen(f^{-1}) = \Re - \{4\}$

Ejercicio 2 (2 puntos)
En una fábrica la función "beneficio semanal" $B(x)$ viene dada por

$$B(x) = -2(x-10)(x-40)$$

donde B es el beneficio en pesos y x la cantidad de unidades producidas.
¿Cuántas unidades deben producirse para que el **beneficio sea siempre positivo**?

Respuesta

El beneficio será siempre positivo si
$B(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-10)(x-40) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-10)(x-40) < 0$
La función beneficio $-2(x-10)(x-40) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$ ó $x = 40$
Para hallar en que conjunto de puntos el beneficio es positivo podemos analizar el signo de la función beneficio en los intervalos determinados por los ceros de dicha función:

- En el intervalo $(-\infty, 10)$ el beneficio es negativo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 1 \in (-\infty, 10)$ tenemos que $B(1) = -2(1-10)(1-40) = -2 \cdot (-9) \cdot (-39) = -702$
- En el intervalo $(10,40)$ el beneficio es positivo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 20 \in (10,40)$ tenemos que $B(20) = -2(20-10)(20-40) = -2 \cdot (10) \cdot (-20) = 400$
- En el intervalo $(40, +\infty)$ el beneficio es negativo ya que si evaluamos el beneficio cuando $x = 50 \in (40, +\infty)$ tenemos que $B(50) = -2(50-10)(50-40) = -2 \cdot (40) \cdot (10) = -800$

Otra manera: ya que la gráfica de la función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, es positiva en el intervalo $(10,40)$.

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1$$
$$g(x) = -x^3 + x + 11$$

Respuesta

Supongamos que las gráficas de las funciones se cortan en por lo menos un punto.
Para hallar analíticamente el valor de la abscisa del punto de intersección debemos igualar ambas funciones y resolver la ecuación

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 = -x^3 + x + 11$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 + x^3 - x - 11 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Nos queda una ecuación cuadrática igualada a cero. Para hallar la solución aplicaremos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Reemplazamos los valores de la ecuación: $a = 2$ $b = -2$ $c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2.2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Para hallar las ordenadas de los puntos donde se cruzan evaluamos cualquiera de las funciones en los valores de x hallados.

Para $x_1 = 3$ la ordenada del punto es $y_1 = g(3) = -3^3 + 3 + 11 = -13$, entonces el punto es $P_1 = (3; -13)$

Para $x_2 = -2$ la ordenada del punto es $y_2 = g(-2) = -(-2)^3 + (-2) + 11 = 17$, entonces el punto es $P_2 = (-2; 17)$

Los puntos de intersección son: $P_1 = (3; -13)$ y $P_2 = (-2; 17)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea $f(x)$ la función lineal que pasa por los puntos $A = (1; -3)$ y $B = (2; 5)$.

Sea

$$g(x) = \frac{4}{x + 7} - 1$$

Hallar el conjunto de ceros de la función $(g \circ f)(x)$.

Respuesta

En primer lugar debemos hallar la fórmula de la función f.

Como es una función lineal es de la forma

$f(x) = mx + b$

La gráfica de la función pasa por los puntos $A = (1; -3)$ y $B = (2; 5)$

$f(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = m \cdot 1 + b$

$f(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = m \cdot 2 + b$

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} -3 = m + b \\ 5 = 2m + b \end{cases}$$

De la primer ecuación tenemos que

$$b = -3 - m$$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$5 = 2m + (-3 - m) \quad \Leftrightarrow \quad 5 = m - 3 \quad \Leftrightarrow \quad m = 8 \quad \Rightarrow \quad b = -11$$

Entonces

$f(x) = 8x - 11$

Luego debemos encontrar $g \circ f$:

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(8x - 11) = \dfrac{4}{(8x - 11) + 7} - 1 = \dfrac{4}{8x - 4} - 1$

Para encontrar el conjunto de ceros de la función de gof debemos resolver:

$$\frac{4}{8x - 4} - 1 = 0$$

$$\frac{4 - (8x - 4)}{8x - 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8 - 8x}{8x - 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Por lo tanto $C^0 = \{1\}$

TEMA 5

Ejercicio 1 (3 puntos)
Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2}{3-x} + a \qquad g(x) = -x + 1$$

se sabe que $(f \circ g)(0) = 2$. Hallar la expresión de $(f \circ g)(x)$ y, si existe, la ecuación de la asíntota vertical de $(f \circ g)(x)$.

Respuesta

Primero debemos hallar el valor de $\boldsymbol{a}$ sabiendo que $(f \circ g)(0) = 2$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(-x+1) = \frac{2}{3-(-x+1)} + a = \frac{2}{2+x} + a$$

$$(f \circ g)(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2+0} + a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2}{2+x} + 1$$

Para que la función $f \circ g$ esté bien definida

$2 + x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2$

$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Para afirmar que $x = -2$ es una asíntota vertical el límite de la función cuando x tiende a -2 debe ser infinito

$$\lim_{x \to -2} \frac{2}{2+x} + 1 = \lim_{x \to -2} \frac{2+(2+x)}{2+x} = \lim_{x \to -2} \frac{4+x}{2+x} = \infty$$

Entonces $x = -2$ es la asíntota vertical.

Ejercicio 2 (2 puntos)
Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$P(x) = ax^3 - 5bx$
$Q(x) = (b-2a)x - 4$

cumplen las siguientes relaciones

$2P(1) + Q(4) = 0$
$P(0) - Q(1) = 0$

Respuesta

Vamos a evaluar los polinomios en cada uno de los puntos involucrados:

$$P(1) = a \cdot 1^3 - 5b \cdot 1 = a - 5b$$
$$P(0) = a \cdot 0^3 - 5b \cdot 0 = 0$$
$$Q(1) = (b - 2a) \cdot 1 - 4 = b - 2a - 4$$
$$Q(4) = (b - 2a) \cdot 4 - 4 = 4b - 8a - 4$$
$$P(0) - Q(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - (b - 2a - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a + 4$$
$$2P(1) + Q(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(a - 5b) + 4b - 8a - 4 = 0$$
$$2a - 10b + 4b - 8a - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6a - 6b - 4 = 0$$

Reemplazando el valor de b

$$-6a - 6(2a + 4) - 4 = 0$$
$$-6a - 12a - 24 - 4 = 0$$
$$-18a - 28 = 0$$
$$a = -\frac{14}{9} \qquad y \qquad b = 2\left(-\frac{14}{9}\right) + 4 = -\frac{28}{9} + 4 = \frac{8}{9}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

La aceleración con la cual se propaga una enfermedad en el tiempo está dada por la fórmula

$$A(t) = 20 - 5(t - 2)^2$$

donde t representa el tiempo que debe considerarse siempre mayor o igual que cero.

¿Para qué valores de t la aceleración será positiva?

Respuesta

La aceleración será positiva si

$$A(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - 5(t - 2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 > 5(t - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > (t - 2)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4} > \sqrt{(t - 2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 > |t - 2|$$

Luego

$$|t - 2| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < t - 2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < t < 4$$

La aceleración será positiva para valores de $t \in (0,4)$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Sea g una función lineal que cumple
$$g(2) - g(1) = 3$$
$$g(0) = -6$$
Hallar, si existen, el o los puntos de intersección entre los gráficos de la función g y la función
$$f(x) = 3(x+1)(2-x)$$

Respuesta

Como la función $g(x)$ es lineal entonces debe cumplir que $g(x) = ax + b$, teniendo en cuenta los datos dados:
$g(2) - g(1) = a2 + b - (a1 + b) = 2a + b - a - b = a$
Por otro lado $g(2) - g(1) = 3$, entonces $a = 3$
Como $g(0) = -6$ tenemos que la ordenada al origen es $b = -6$
Nos queda entonces que
$g(x) = 3x - 6$
Ahora queremos hallar, si existen, los puntos de corte entre los gráficos de g y f.
$$f(x) = g(x)$$
$$3 \cdot (x+1)(2-x) = 3x - 6$$
$$3 \cdot (2x - x^2 + 2 - x) = 3x - 6$$
$$3 \cdot (x - x^2 + 2) = 3x - 6$$
$$-3x^2 + 3x + 6 = 3x - 6$$
$$-3x^2 + 6 = -6$$
$$-3x^2 = -12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ó } x = -2$$
Para hallar las ordenadas de los puntos donde se cruzan evaluamos cualquiera de las funciones en los valores de x hallados.
Para $x = 2$ la ordenada del punto es $g(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, entonces el punto es $P_1 = (2; 0)$
Para $x = -2$ la ordenada del punto es $g(-2) = 3 \cdot (-2) - 6 = -12$, entonces el punto es $P_2 = (-2; -12)$
Los puntos de intersección son: $P_1 = (2; 0)$ y $P_2 = (-2; -12)$

TEMA 6

Ejercicio 1 (3 puntos)
Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$g(x) = 1 - 2x$$

Hallar la función $(f \circ g)(x)$. Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

Respuesta

La función $f \circ g$ es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-2x) = \frac{2}{(3-(1-2x))^2} = \frac{2}{(2+2x)^2}$$

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(2+2x)^2} = 0$$

En $y = 0$ hay una asíntota horizontal.

Ejercicio 2 (2 puntos)
Dada la función

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} - 1$$

Hallar la función $f^{-1}(x)$ y su dominio

Respuesta

Hallamos f^{-1}:

$$\frac{2}{2x-3} - 1 = y$$

$$\frac{2}{2x-3} = y + 1$$

$$\frac{2}{y+1} = 2x - 3$$

$$\frac{2}{y+1} + 3 = 2x$$
$$\frac{1}{y+1} + \frac{3}{2} = x$$

Entonces
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}$$
La función inversa está bien definida si $x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$
Entonces $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Ejercicio 3 (2 puntos)
El costo (expresado en pesos) para producir x unidades de un nuevo producto de limpieza esta definido como $C(x) = 1200 - bx$.
Se sabe que el costo de 100 unidades es de \$600. ¿Cuántas unidades serán necesarias producir para que el costo sea menor o igual a \$420?

Respuesta

Se sabe que el costo de 100 unidades es de \$600, entonces
$$C(100) = 600$$
$$1200 - b \cdot 100 = 600 \quad \Leftrightarrow \quad -100b = 600 - 1200 \quad \Leftrightarrow \quad -100b = -600 \quad \Leftrightarrow \quad b = 6$$
Se tiene que $C(x) = 1200 - 6x$
El costo será menor o igual a \$420 si y sólo si
$$1200 - 6x \leq 420 \quad \Leftrightarrow \quad -6x \leq 420 - 1200 \quad \Leftrightarrow -6x \leq -780 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 130$$
Se deberán producir por lo menos 130 unidades para que el costo sea menor o igual a \$420

Ejercicio 4 (3 puntos)
Hallar la intersección entre los conjuntos A y B siendo
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ tales\ que \ \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1\right\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \ tales\ que \ |x| < 2\}$$

Respuesta

Si $x \in A$

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|>1 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{2}>1 \quad \text{ó} \quad x+\frac{1}{2}<-1$$

$$x+\frac{1}{2}>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>1-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

$$x+\frac{1}{2}<-1 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x<-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$$

Luego

$$A=\left(\frac{1}{2},+\infty\right) \cup \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$$

Si $x \in B$

$$|x|<2 \quad \Leftrightarrow \quad -2<x<2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2,2)$$

Luego $B=(-2,2)$

Entonces

$$A \cap B=\left[\left(\frac{1}{2},+\infty\right) \cup \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\right] \cap (-2,2)=\left(-2,-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},2\right)$$