APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2,50	0,50	0,50	2	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. Encontrar una función $F(x)$ tal que: $F'(x) = \frac{cos(\,ln(x))}{x}$ y que cumpla con la condición $F(1) = 5$

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 6, para encontrar $F(x)$ debemos calcular $\int F'(x)dx$, es decir, $\int \frac{cos(\,ln(x))}{x}dx$.

Observando el integrando, vemos que la integral tiene la forma siguiente:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx$$

En este caso, $f(x) = cos(\,x)$, $g(x) = ln(\,x)$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$

Si escribimos el integrando de la siguiente manera: $\int cos(\,ln(\,x)) \cdot \frac{1}{x}dx$, resulta factible la aplicación del método de integración por sustitución (Unidad 6, Sesión 12, 2. Métodos de integración)

Entonces, asignando:

$$u = ln(\,x)$$

resulta:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

y queda:

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

Al reemplazar la nueva variable u y su diferencial du , resulta:

$\int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}dx = \int cos(\,u)du$, integral que sale de la tabla por ser inmediata (ver 5. Tabla y notas sobre integrales, sesión 12, unidad 6)

Entonces,

$$\int cos(\,u)du = sen(u) + C$$

Para finalizar, el resultado debe quedar expresado en la variable original x, luego:

$$\int \cos(\ln(x)).\frac{1}{x}dx = \int cos(u)du = sen(u) + C = sen(ln(x)) + C$$

Teniendo en cuenta que el resultado de una integral indefinida (también llamada primitiva o antiderivada) es una familia de funciones que difieren en una constante C (ver 1. Integrales, sesión 12, unidad 6) en este caso podemos hallar el valor de esa constante C puesto que conocemos el valor que toma la función primitiva F en $x = 1$. (El dato es $F(1) = 5$)

Resulta:

$$F(x) = sen(ln(x)) + C$$

$$F(1) = sen(ln(1)) + C$$

Recordando que $ln(1) = 0$ y $sen(ln(1)) = sen(0) = 0$

$F(1) = 5$, queda,

$$0 + C = 5$$

$$\boxed{C = 5}$$

La función F buscada que cumple con la condición dada es:

$$\boxed{F(x) = sen(ln(x)) + 5}$$

---

2. El conjunto de ceros de $f(x) = 2 + log_2\left(\frac{1}{-2x+3}\right)$ es:

a) $C_0 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **CORRECTA**

b) $C_0 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $C_0 = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

d) $C_0 = \left\{\frac{11}{8}\right\}$

Para obtener los ceros de f se hace $f(x) = 0$ y se resuelve la ecuación:

$$2 + log_2\left(\frac{1}{-2x+3}\right) = 0$$

$$log_2\left(\frac{1}{-2x+3}\right) = -2$$

A partir de lo estudiado en la unidad 4, sesión 9, aplicando la definición de logaritmo,

$$\frac{1}{-2x+3} = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{-2x+3} = \frac{1}{4}$$

$$4 = -2x + 3$$

$$2x = 3 - 4$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

---

3. La ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$ es:

a) $y = 2$ **CORRECTA**

b) $y = 3$

c) $y = 2x + 2$

d) $y = 2x - 2$

A partir de lo estudiado en las unidades 4 y 5 (sesiones 10 y 11), para obtener la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado se parte del cálculo de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Recordando que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado es el valor que toma la función derivada en dicho punto, se procede a calcular $f'(x)$ por aplicación de las reglas prácticas de derivación ya estudiadas.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(-1) = 3(1)^2 - 3$$
$$f'(-1) = 0$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta en su forma explícita es:

$$y = mx + b$$

Resulta,

$$m = 0$$

Luego, la recta buscada es:

$$y = b$$

La recta y la función "comparten" el punto de tangencia, entonces, como

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)$$

$$f(-1) = -1 + 3$$

$$f(-1) = 2$$

Queda entonces,

$$\boxed{y = 2}$$

4. La concentración *C* de una droga en la sangre, *t* horas después de ser inyectada, puede determinarse mediante la fórmula: $C(t) = \frac{t}{54+t^3}\ (t > 0)$. ¿A qué hora se produce la máxima concentración y de cuánto será esta concentración para esa hora?

Para resolver el problema debemos hallar el máximo de la función C. De acuerdo con lo estudiado en la unidad 5, sesión 11, se calculan los puntos críticos de la función dada (candidatos a extremos); para ello, se obtiene la función derivada primera $C'(t)$ y se iguala a cero (condición necesaria)

Entonces:

$$C'(t) = \frac{1 \cdot (54 + t^3) - t(0 + 3t^2)}{(54 + t^3)^2}$$

$$C'(t) = \frac{54 + t^3 - 3t^3}{(54 + t^3)^2}$$

$$C'(t) = \frac{54 - 2t^3}{(54 + t^3)^2}$$

Luego,

$$\frac{54 - 2t^3}{(54 + t^3)^2} = 0$$

Para que un cociente sea cero, el dividendo debe ser cero:

$$54 - 2t^3 = 0$$

$$54 = 2t^3$$

$$2t^3 = 54$$

$$t^3 = 27$$

$$t = \sqrt[3]{27}$$

$$t = 3$$

Para corroborar que se trata de un máximo local, debemos aplicar alguno de los criterios estudiados para la clasificación de los puntos críticos (condiciones suficientes). En este caso, optamos por el criterio de la derivada primera analizando el cambio de signo en un entorno del punto crítico (el criterio de la derivada segunda no resulta conveniente porque el cálculo demandaría mucho tiempo).

Entonces, evaluamos la función derivada en los puntos $t = 2$ (izquierda) y $t = 4$ (derecha).

$$C'(2) = \frac{54 - 2 \cdot 2^3}{(54 + 2^3)^2} = \frac{54 - 16}{62^2} > 0$$

No interesa el resultado sino el signo del mismo. En este caso, la función resulta creciente a izquierda de $t = 3$

$$C'(4) = \frac{54 - 2 \cdot 4^3}{(54 + 4^3)^2} = \frac{54 - 128}{118^2} < 0$$

La función resulta decreciente a derecha de $t = 3$.

Luego, puede afirmarse que en el punto de abscisa $t = 3$ hay un máximo relativo (viene creciendo a izquierda de $t = 3$ y comienza a decrecer a derecha del punto)

Entonces, la máxima concentración de la droga se produce a las 3 horas de haber sido inyectada.

Para calcular la concentración, se calcula $C(3)$ (se reemplaza en la función dada)

$$C(3) = \frac{3}{54 + 3^3} = \frac{3}{81} = \boxed{\frac{1}{27}}$$

La concentración es de $\frac{1}{27}$ (en las unidades que corresponda según el problema)

5. Dados los vectores $\vec{A} = ai + j + 3k$, $\vec{B} = 2i - bj + k$, $\vec{C} = ci + 4j - 2k$, los valores para a, b y c que verifican $A \times \vec{B} = 4\vec{C}$ son:

a) $\boldsymbol{a = -10}$, $\boldsymbol{b = -0,6}$ y $\boldsymbol{c = -0,2}$ **CORRECTA**

b) $\boldsymbol{a = 22,\ b = \frac{3}{11}}$ y $\boldsymbol{c = \frac{5}{11}}$

c) $\boldsymbol{a = -10}$, $\boldsymbol{b = -1}$ y $\boldsymbol{c = 0,5}$

d) $\boldsymbol{a = 22, b = \frac{5}{11}}$ y $\boldsymbol{c = \frac{13}{22}}$

A partir de lo estudiado en la unidad 7 (sesión 13), se comienza con el cálculo del producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$

Téngase en cuenta que el resultado del producto vectorial es un vector.

$$\vec{A} \times \vec{B} = (1 \cdot 1 - 3 \cdot (-b); 3 \cdot 2 - a \cdot 1; a \cdot (-b) - 1 \cdot 2)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (1 + 3b; 6 - a; -ab - 2)$$

Luego se efectúa $4 \cdot \vec{C}$

$$4 \cdot \vec{C} = 4 \cdot (c; 4; -2)$$

$$4 \cdot \vec{C} = (4 \cdot c; 4 \cdot 4; 4 \cdot (-2))$$

$$4 \cdot \vec{C} = (4c; 16; -8)$$

Efectivamente, el producto de un escalar (número) y un vector da por resultado un vector.

Recordando que una igualdad vectorial equivale, en este caso, a 3 igualdades escalares puesto que los vectores tienen 3 componentes, resulta:

$$\boldsymbol{A \times \vec{B} = 4\vec{C}}$$

$$(1 + 3b; 6 - a; -ab - 2) = (4c; 16; -8)$$

Igualando las respectivas componentes queda un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (lineal) que se resuelve por cualesquiera de los métodos estudiados en cursos previos. En este caso, optamos por el método de sustitución (no confundir con el método de sustitución de integrales que lleva el mismo nombre)

$$\begin{cases} 1 + 3b = 4c \\ 6 - a = 16 \\ -ab - 2 = -8 \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos directamente el valor de a:

$$a = 6 - 16$$

$$\boxed{a = -10}$$

Luego puede despejarse b de la tercera ecuación “sustituyendo” el valor de a calculado:

$$-(-10)b - 2 = -8$$

$$10b = -8 + 2$$

$$10b = -6$$

$$\boxed{b = -0{,}6}$$

Para finalizar, se despeja el valor de c de la primera ecuación "sustituyendo" el valor de b calculado:

$$1 + 3(-0{,}6) = 4c$$

$$1 - 1{,}8 = 4c$$

$$-0{,}8 = 4c$$

$$\boxed{c = -0{,}2}$$

---

6. $\int_1^2 x^3\,dx$ **es igual a :**

a) $\frac{15}{4}$ **CORRECTA**

b) $-\frac{15}{4}$

c) -15

d) 15

Se trata de una integral definida (según lo estudiado en la unidad 6, sesión 12).

Calculando una primitiva de la función que figura en el integrando y aplicando la regla de Barrow, queda:

$$\int_1^2 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Observación: se omite la constante de integración al integrar porque, al aplicar la regla de Barrow, la misma queda cancelada al efectuar la diferencia. En efecto,

$$\int_1^2 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} + C\right) - \left(\frac{1^4}{4} + C\right) = 4 + C - \frac{1}{4} - C = \frac{15}{4}$$

---

7. Determinar cuál de las opciones representa el/los valores de $x \in [-\pi; 0]$ tales que: $sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$

a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

d) $S = \emptyset$ **CORRECTA**

A partir de lo estudiado en la unidad 4 (sesión 8) recordando que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resulta la siguiente ecuación trigonométrica:

$$sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La función seno toma valores positivos en los cuadrantes primero y segundo mientras que toma valores negativos en los cuadrantes tercero y cuarto.

El intervalo dado comprende los ángulos del tercero y cuarto cuadrantes, luego no hay valores que verifiquen, en consecuencia, la ecuación no tiene solución en dicho intervalo, es decir,

$$\boxed{S = \emptyset}$$

---

8. Dada la función $f$de fórmula $f(x) = 3 - m \cdot 2^x$, indicar entre las siguientes opciones el valor de$m$ real para que la gráfica de la función pase por el punto $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

a) $m = \frac{10}{3}$

b) $m = \frac{8}{3}$ **CORRECTA**

c) $m = -\frac{8}{3}$

d) No hay valor real de m que cumpla lo pedido.

A partir de lo estudiado en la unidad 4 (sesión 9), y recordando que, en este caso, debe ser:

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

El punto, por pertenecer a la gráfica, debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{3} = 3 - m \cdot 2^0$$

Recordando la convención de que todo número distinto de cero elevado a la potencia cero da por resultado 1, queda

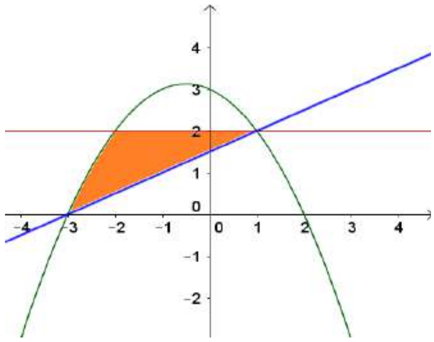
$$\frac{1}{3} = 3 - m \cdot 1$$

$$m = 3 - \frac{1}{3}$$

$$\boxed{m = \frac{8}{3}}$$

---

9. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ **,** $g(x)=2$ **y** $h(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$**, identificar cada una de ellas en el gráfico y hallar el área de la región sombreada.**

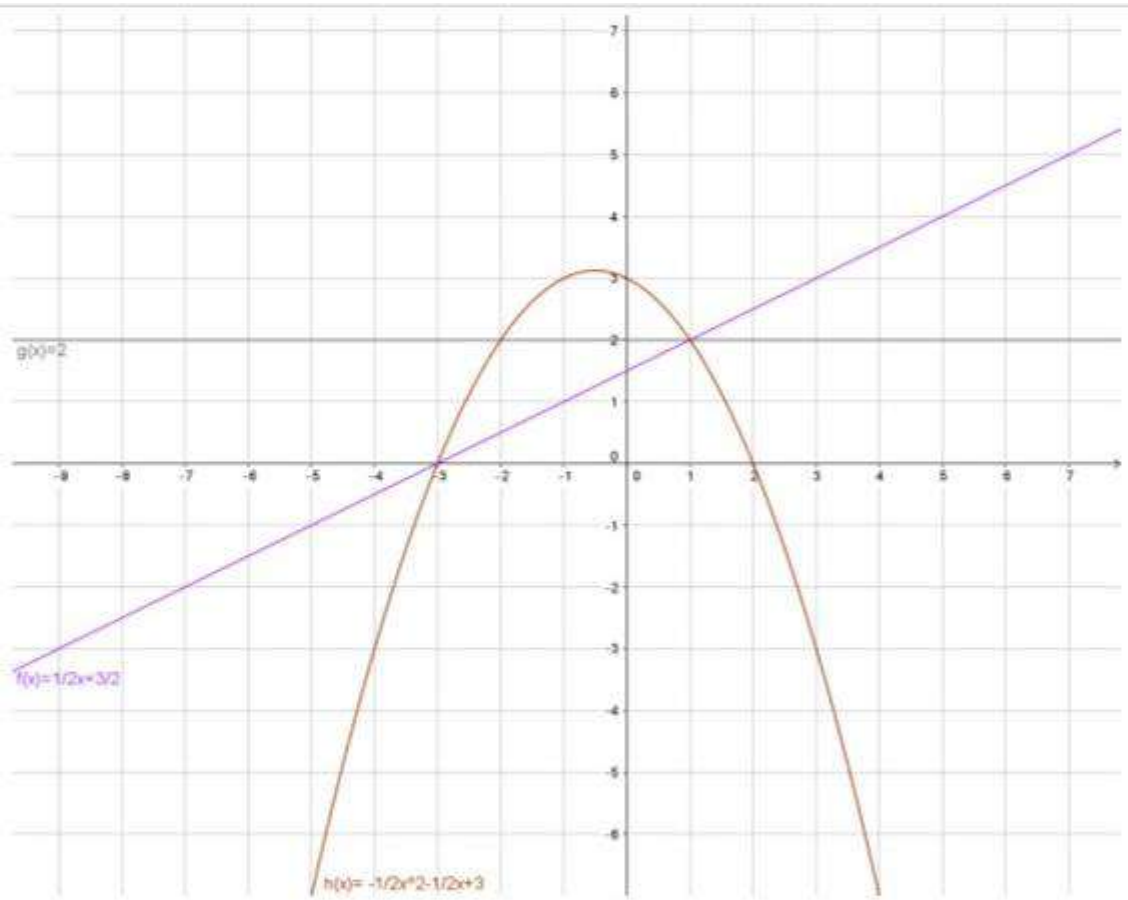


En primer término, justificamos la asignación de las expresiones algebraicas a cada una de las 3 gráficas (según lo estudiado en la Unidad 2, sesiones 3 y 4):

A partir de la expresión de la función lineal $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, corroboramos que su gráfica corta al eje de ordenadas en el punto $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ porque $f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ (ordenada al origen). También se observa en el gráfico que la intersección con el eje de abscisas es $(-3{,}0)$ pues $f(-3)=\frac{1}{2}\cdot(-3)+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$ (El valor -3 surge de igualar a cero la expresión de f)

La gráfica de la función $g(x)=2$ es una recta paralela al eje x (función constante) que interseca al eje y en $(0{,}2)$

La gráfica de $h(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$ es una parábola que abre hacia abajo, interseca al eje de ordenadas en $(0{,}3)$ porque $h(0)=3$ y al eje de abscisas en los puntos $(-3{,}0)$ y $(2{,}0)$ (se obtienen a partir de resolver la ecuación cuadrática $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3=0$ mediante la fórmula resolvente correspondiente)



El cálculo del área del recinto sombreado debe realizarse en 2 etapas porque está limitado superiormente por 2 funciones (e inferiormente por la función lineal). Quedan 2 regiones cuyas áreas se calculan por separado y luego se suman sus resultados.

Previo al cálculo deben hallarse las intersecciones de las gráficas para justificar luego los límites de integración elegidos.

La abscisa del punto de intersección de las gráficas de f y g surge de resolver la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2}x = 2 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

Las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de g y h surgen de resolver la ecuación:

$$h(x) = g(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 2$$

Operando resulta:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

Multiplicando por -2 miembro a miembro, queda:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente, se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 1},\ \boxed{x_2 = -2}$$

Las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de f y h surgen de resolver la ecuación:

$$h(x) = f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Operando resulta:

$$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

$$-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=0$$

Multiplicando por -2 miembro a miembro, queda:

$$x^2+2x-3=0$$

Aplicando la fórmula resolvente, se obtiene:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

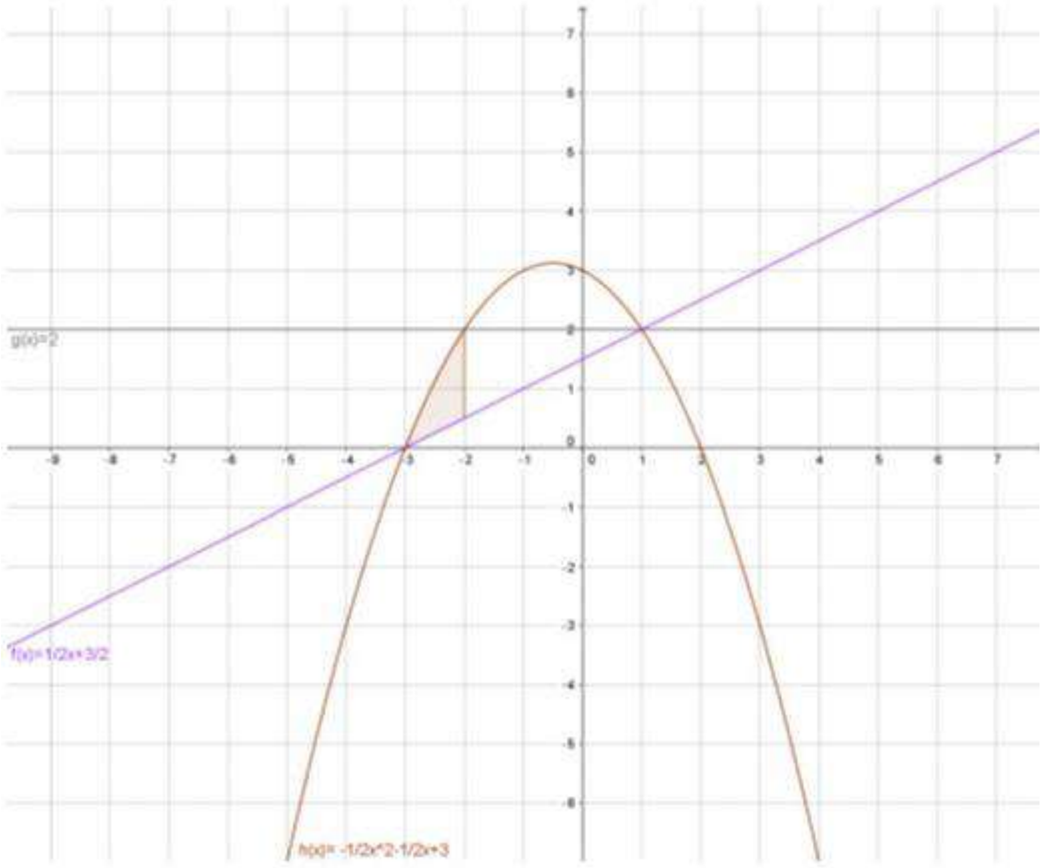
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$$\boxed{x_1=1}\ ,\ \boxed{x_2=-3}$$

A continuación se procede al cálculo del área de la región sombreada.

En una primera etapa se calcula el área del recinto limitado inferiormente por f y superiormente por g, entre los puntos de abscisas $x=-3$ y $x=-2$ según puede observarse en el siguiente gráfico:



A partir de lo estudiado para el cálculo de áreas de regiones limitadas por curvas (Unidad 6, sesión 12, 4. Cálculo de áreas) puede plantearse la integral definida para calcular el área del recinto sombreado en la figura. Lo denominamos A_1 (área Nº1):

$$A_1 = \int_a^b [h(x) - f(x)]\,dx$$

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\right] dx$$

Operando algebraicamente en el integrando, resulta:

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx$$

Ahora calculamos la integral aplicando la regla de Barrow, según lo estudiado en la Unidad 6:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una primitiva de f.

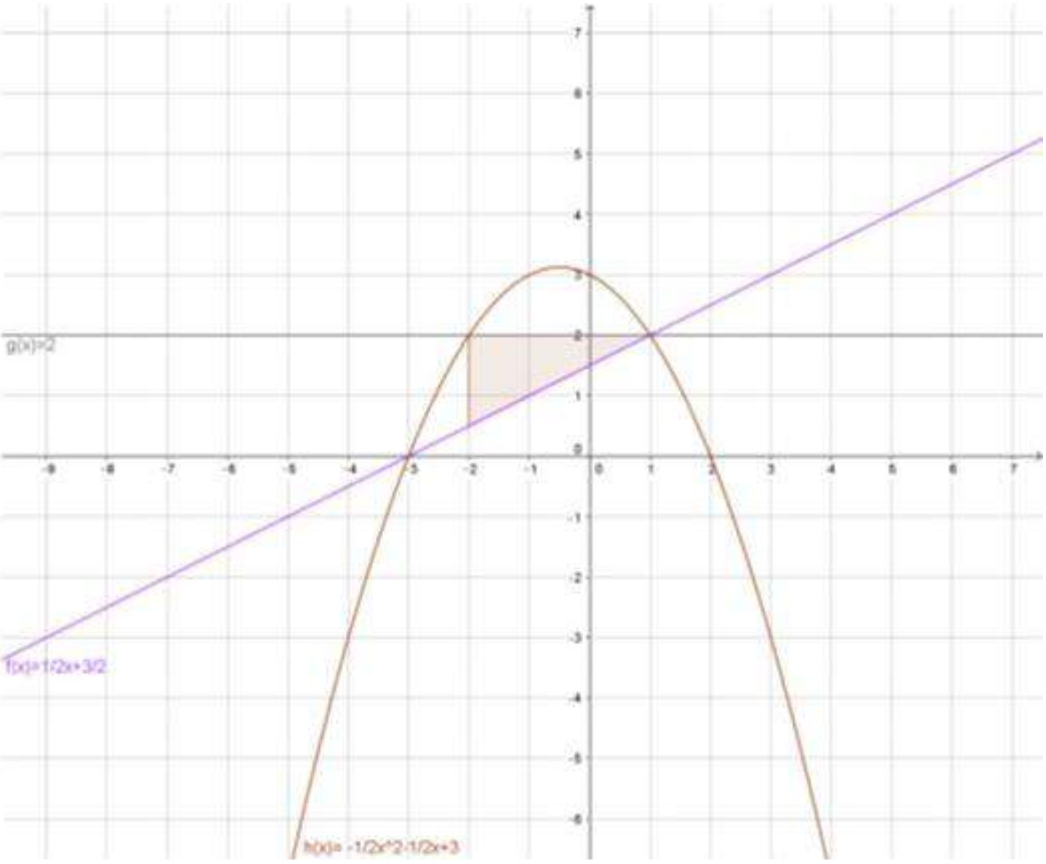
Entonces:

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-3}^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{(-2)^3}{6} - \frac{(-2)^2}{2} + \frac{3}{2}(-2)\right) - \left(-\frac{(-3)^3}{6} - \frac{(-3)^2}{2} + \frac{3}{2}(-3)\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{3} - 2 - 3\right) - \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{4}{3} - 5 - \frac{27}{6} + 9 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

En la segunda etapa, se calcula el área del recinto limitado inferiormente por f y superiormente por h, entre los puntos de abscisas $x = -2$ y $x = 1$ según puede observarse en el siguiente gráfico:



En este caso, llamando A_2 (área Nº2) al área sombreada, resulta:

$$A_2 = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

$$A_2 = \int_{-2}^{1} \left[2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\right] dx$$

Operando algebraicamente en el integrando, resulta:

$$A_2 = \int_{-2}^{1} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$$

Entonces:

$$A_2 = \int_{-2}^{1} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^2}{4} + \frac{1}{2}(-2)\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = \boxed{\frac{9}{4}}$$

Observación: en este último caso, puede verificarse el resultado a partir de la fórmula que permite el cálculo del área de un triángulo.

Para finalizar el cálculo se hace la suma de las áreas A_1 y A_2.

Llamando A al área total, queda:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{5}{6} + \frac{9}{4}$$

$$\boxed{A = \frac{37}{12}}$$

Importante: cuando se efectúa el cálculo de un área, el resultado es siempre positivo.