FINAL 15/07/2016 - Tema 2

Ejercicio 1

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x^2+1)}$ en $x_0 = 1$

Solución y comentarios

Forma 1 de resolución

La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 1$ (expresada en forma canónica) es:

$$r(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Calculamos la derivada de la función f:

$$f'(x) = \left(\frac{4x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(4x-2)'(x^2+1) - (x^2+1)'(4x-2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(4)(x^2+1) - (2x)(4x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}$$

Evaluamos la derivada de la función en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \frac{-4(1)^2+4(1)+4}{((1)^2+1)^2} = 1$$

Calculamos la función en $x_0 = 1$

$$f(1) = \frac{4\cdot(1)-2}{1^2+1} = 1$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente (en forma canónica) es:

$$\boldsymbol{r(x) = 1(x-1) + 1}$$

Forma 2 de resolución

La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 1$ (expresada en forma explícita) es:

$$r(x) = f'(1)\cdot x + b$$

Calculamos la derivada de la función f:

$$f'(x) = \left(\frac{4x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(4x-2)'(x^2+1) - (x^2+1)'(4x-2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(4)(x^2+1)-(2x)(4x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}$$

Evaluamos la derivada de la función en $x_0 = 1$

$$f'(1) = \frac{-4(1)^2+4(1)+4}{((1)^2+1)^2} = 1$$

Entonces,

$$r(x) = 1 \cdot x + b$$

Falta calcular el valor de la ordenada. Para esto usamos el hecho de que cuando $x_0 = 1$

$$r(1) = f(1)$$

Calculamos la función en $x_0 = 1$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1 - 2}{1^2+1} = 1$$

Por otro lado,

$$r(1) = 1 \cdot 1 + b = 1 + b$$

Entonces

$$1 = 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$$

La ecuación de la recta tangente (expresada en forma explícita) es:

$$\boldsymbol{r(x) = x}$$

Ejercicio 2

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función

$f(x)=(x-2)^2(x+1)$

Solución y comentarios

Primero calculamos el dominio de la función. En este caso el dominio es el conjunto de todos los números reales.

Ahora vamos a calcular la derivada primera y su dominio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x-2)^2\cdot(x+1)]' = ((x-2)^2)'(x+1)+(x+1)'(x-2)^2 = \\ &= 2(x-2)(x+1)+(x-2)^2 = (x-2)[2(x+1)+(x-2)] = \\ &= (x-2)\cdot 3x \end{aligned}$$

Al igual que la función, el dominio de la derivada primera es el conjunto de todos los números reales.

Igualamos a cero la derivada primera para hallar los puntos críticos (candidatos a máximos y/o mínimos de la función):

$$f'(x)=0 \iff (x-2)(3x)=0 \quad (x-2)=0 \ \vee \ 3x=0 \iff \boldsymbol{x=2} \ \vee \ \boldsymbol{x=0}$$

Vamos a analizar el signo de la derivada primera en los intervalos $(-\infty;0);(0;2);(2;+\infty)$

- $(-\infty;0)$

  $-1 \in (-\infty;0)$ y $f'(-1)=(-1-2)\cdot 3(-1)=9>0$

  En el intervalo $(-\infty;0)$ la derivada primera es siempre positiva, y por lo tanto la función es creciente.
- $(0;2)$

  $1 \in (0;2)$ y $f'(1)=(1-2)\cdot 3(1)=-3<0$

  En el intervalo $(0;2)$ la derivada primera es siempre negativa, y por lo tanto la función es decreciente.
- $(2;+\infty)$

  $3 \in (2;+\infty)$ y $f'(3)=(3-2)\cdot 3(3)=9>0$
- En el intervalo $(2;+\infty)$ la derivada primera es siempre positiva, y por lo tanto la función es creciente.

Entonces,

$$\mathit{Intervalos\ de\ crecimiento} = (-\infty;0);(2;+\infty)$$

$$\mathit{Intervalo\ de\ decrecimiento} = (0;2)$$

Como la función es creciente en el intervalo $(-\infty;0)$ y decreciente en el intervalo $(0;2)$ tiene un máximo local en el punto $Max=\big(0;f(0)\big)=(0;4)$.

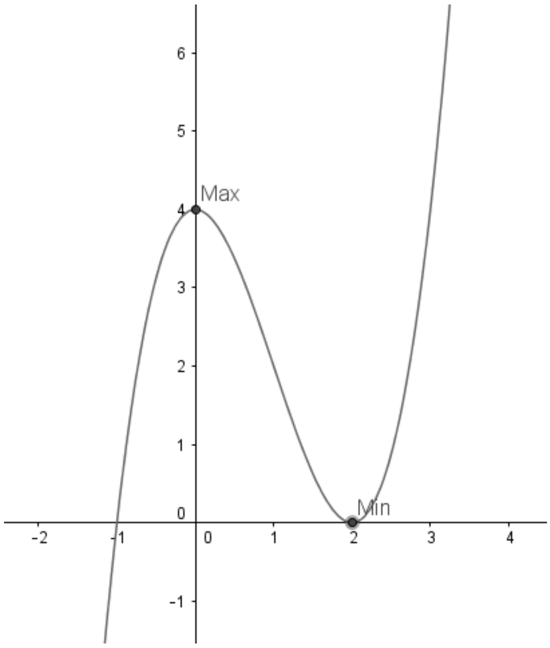
Como la función es decreciente en el intervalo $(0; 2)$ y creciente en el intervalo $(2; +\infty)$ tiene un mínimo local en el punto $Min = \left(2; f(2)\right) = (2; 0)$

También se puede utilizar el criterio de la derivada segunda para concluir que los puntos

$$Max = \left(0; f(0)\right) = (0; 4) \text{ y } Min = \left(2; f(2)\right) = (2; 0)$$

son, respectivamente, máximo y mínimos de la función. Se debe verificar que $f''(0) < 0$ y $f''(2) > 0$.

El gráfico de la función es:



Ejercicio 3

Para la siguiente función $f(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x<2 \\ -x^2+4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

determinar los ceros, el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad y la imagen de la función. Graficarla.

Solución y comentarios

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Comenzamos determinando los ceros de la función:

- Para los valores $x < 2$ la función no se anula nunca ya que vale constantemente 5.
- Para los valores de $x \geq 2$ la función se anula si y solo si

  $-x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

  La solución $x = -2$ no se tiene en cuenta ya que la función está definida como $-x^2 + 4$ solo para valores $x \geq 2$.

Entonces:

$$Conjunto\ de\ ceros\ de\ la\ función = C^0 = \{2\}$$

Para analizar los conjuntos de positividad y negatividad debemos ver el signo de la función entre los valores que la anulan y/o la definen. Es decir, debemos analizar el signo de la función en los intervalos $(-\infty; \mathbf{2})$; $(\mathbf{2}; +\infty)$

- $(-\infty; 2)$

  Por definición en este intervalo la función vale siempre 5 y por lo tanto es positiva.
- $(2; +\infty)$

  $3 \in (2; +\infty)$ y $f(3) = -3^2 + 4 = -5 < 0$

  En el intervalo $(2; +\infty)$ la función es negativa.

Entonces:

$$Conjunto\ de\ positividad\ de\ la\ función = C^+ = (-\infty; 2)$$
$$Conjunto\ de\ negatividad\ de\ la\ función = C^- = (2; +\infty)$$

Para el cálculo del conjunto Imagen tenemos que:

- $si\ x < 2$ la función es vale siempre 5.

  Si $x < 2$, $Imagen(f) = \{5\}$

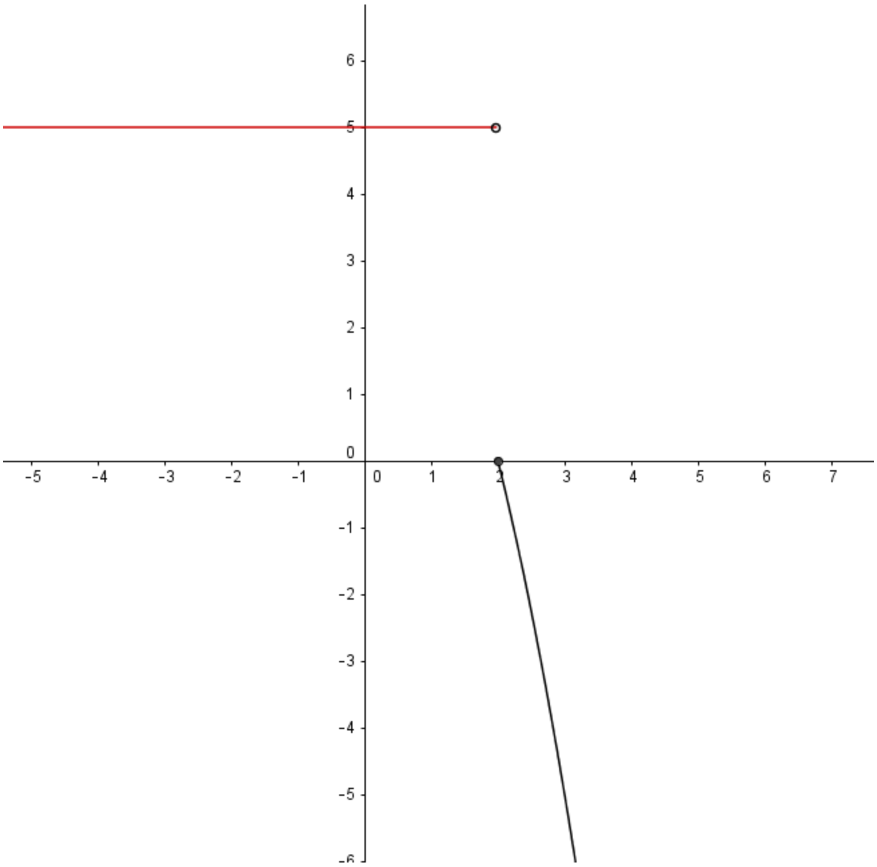
- $si\ x \geq 2$ la función es parte de una parábola, entonces

$$x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \leq -4 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq 0$$

Si $x \geq 2$, $Imagen(f) = (-\infty; 0]$

Entonces,

$$Imagen(f) = (-\infty; 0] \cup \{5\}$$



Ejercicio 4

Calcular el valor de ***k*** para que $\int_0^3 (x^2 + kx)dx = 6$

Solución y comentarios

Primero calculamos la integral del enunciado:

$$\int_0^3 (x^2 + kx)dx = \left(\frac{x^3}{3} + k\frac{x^2}{2}\right)|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + k\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} + k\frac{0^2}{2}\right) = 9 + k\ \frac{9}{2}$$

Como el valor del a integral debe ser 6, planteamos

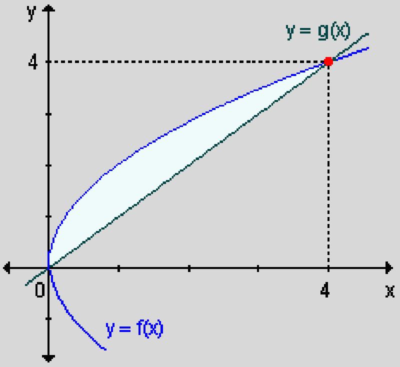
$$9 + k\ \frac{9}{2} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad k\ \frac{9}{2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad k\ = -\frac{2}{3}$$

El valor buscado es

$$k = -\frac{2}{3}$$

Ejercicio 5

Dada la siguiente gráfica



hallar las ecuaciones de las curvas y el área de la zona sombreada.

Solución y comentarios

La gráfica de la función g es una recta. En este caso $g(x) = x$

La función f tiene el gráfico similar a la función $\sqrt{x}$.

En este caso cuando $x = 4$ la función debe valer 4, entonces $f(x) = 2\sqrt{x}$

Para calcular el área sombreada planteamos:

$$\acute{A}rea = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx = \int_0^4 (2x^{1/2} - x)\, dx = \left(2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \left(\frac{4}{3}4^{3/2} - \frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}0^{3/2} - \frac{x0^2}{2}\right) = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$$