Matemática

Clave de corrección primer parcial

Cuarto turno – Tema 2 - 24/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$ que pasa por el punto $A = (1; 5)$. ¿En qué punto del plano se cruzan ambas rectas?

La ecuación de la recta que buscamos es de la forma $y = mx + b$.

Como es perpendicular a la recta de ecuación $y = \frac{1}{3}x + 1$

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Por otro lado, como pasa por el punto $(1; 5)$ tenemos que $5 = m(1) + b$.

Entonces:

$$m = -3$$

$$5 = m + b \quad \leftrightarrow \quad 5 = -3 + b \quad \leftrightarrow \quad b = 8$$

La ecuación de la recta es $y = -3x + 8$

Para hallar la abscisa del punto donde se cruzan las rectas igualamos las ecuaciones que definen las rectas:

$$\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 8$$

$$\frac{1}{3}x + 3x = 8 - 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{10}{3}x = 7 \quad \rightarrow \quad x = \frac{21}{10}$$

Para hallar la ordenada del punto evaluamos el valor hallado de la abscisa en cualquiera de las rectas:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{21}{10} + 1 = \frac{7}{10} + 1 = \frac{17}{10}$$

El punto donde se cruzan las rectas es el $\left(\frac{21}{10}; \frac{17}{10}\right)$.

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dada la función $h(x) = \frac{1-x}{2x-3}$ hallar la expresión de h^{-1} y el valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ que satisface $h^{-1}(b-1) = 3$

En primer término hallamos la función inversa de h.

Partiendo de

$$y = \frac{1-x}{2x-3}$$

despejamos la expresión de x:

$$y(2x-3) = 1-x$$
$$2xy - 3y = 1 - x$$
$$2xy + x = 3y + 1$$
$$x(2y+1) = 3y+1$$
$$x = \frac{3y+1}{2y+1}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$h^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$$

Como $h^{-1}(b-1) = 3$

$$\frac{3(b-1)+1}{2(b-1)+1} = 3$$
$$\frac{3b-2}{2b-1} = 3 \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right)$$
$$3b-2 = 3 \cdot (2b-1)$$
$$3b-2 = 6b-3$$
$$3b - 6b = -3 + 2$$
$$-3b = -1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $p \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación $|4x + p| < 2$ sea el intervalo $(1; 2)$.

Resolvemos la inecuación:

$$|4x + p| < 2$$
$$-2 < 4x + p < 2$$
$$-2 - p < 4x < 2 - p$$
$$\frac{-2-p}{4} < x < \frac{2-p}{4} \quad \rightarrow \quad x \in \left(\frac{-2-p}{4}; \frac{2-p}{4}\right)$$

Entonces $\left(\frac{-2-p}{4}; \frac{2-p}{4}\right) = (1; 2)$

Para hallar el valor de la constante p planteamos que

$$\frac{-2-p}{4} = 1 \quad \leftrightarrow \quad -2 - p = 4 \quad \leftrightarrow \quad p = -6$$

También se pudo haber planteado

$$\frac{2-p}{4} = 2 \quad \leftrightarrow \quad 2 - p = 8 \quad \leftrightarrow \quad p = -6$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el conjunto imagen y el conjunto de positividad de la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$

Para hallar el conjunto imagen buscamos las coordenadas del vértice.

La coordenada x del vértice es igual a:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$x_v = -\frac{3}{2 \cdot (-3)} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = -3x_v^2 + 3x_v + 6$$
$$y_v = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 6 = \frac{27}{4}$$

Dado que la constante que acompaña al término principal de la cuadrática es negativa el conjunto imagen es el intervalo $\left(-\infty;\frac{27}{4}\right]$.

Para hallar el conjunto de positividad de la cuadrática hallamos primero las raíces. Usando la fórmula resolvente llegamos a que sus raíces son:

$$x=-1 \quad ; \quad x=2$$

Analizamos el signo de la cuadrática en los intervalos determinados por sus raíces:

- en el intervalo $(-\infty;-1)$ el signo es negativo ya que si especializamos en $x=-4$ tenemos que $-3\cdot(-4)^2+3\cdot(-4)+6=-48-12+6=-54$
- en el intervalo $(-1;2)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x=0$ tenemos que $-3\cdot(0)^2+3\cdot(0)+6=6$
- en el intervalo $(2;+\infty)$ el signo es negativo ya que si especializamos en $x=3$ tenemos que $-3\cdot(3)^2+3\cdot(3)+6=-27+9+6=-12$

El conjunto de positividad de la función es el intervalo $(-1;2)$.