21/12/2022 **TEMA 2**


| | |
|---|---|
| APELLIDO: | CALIFICACIÓN: |
| NOMBRE: | |
| DNI (registrado en SIU Guaraní): | |
| E-MAIL: | DOCENTE (nombre y apellido): |
| TEL: | |
| AULA: | |

## Tabla de uso exclusivo para el docente

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| Puntaje de cada ejercicio | 2,50 | 0,50 | 0,50 | 2,50 | 0,50 | 0,50 | 0,50 | 0,50 | 2 |

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

**1. Hallar el/los valores de $x \in \mathbb{R}$ para el cual/los cuales la función $f(x) = 5x.e^{5-2x}$ alcanza un máximo local.**

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 5, Derivadas (Sesión 8), Estudio de funciones, se procede a determinar los puntos críticos de la función (valores de la variable independiente para los cuales la función derivada primera es cero o bien no está definida)
Entonces aplicando la regla de derivación de un producto de funciones y la regla de la cadena resulta,

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5-2x} + 5x \cdot e^{5-2x}(-2)$$

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5-2x} - 10x \cdot e^{5-2x}$$

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5-2x}(1-2x)$$

En este caso, dado que el dominio de $f'$ es el conjunto de todos los números reales, luego, se procede al cálculo de los valores de $x$ tales que $f'(x) = 0$,

$$5 \cdot e^{5-2x}(1-2x) = 0$$

Se trata de un producto de 3 factores; para que tal producto sea cero, alguno de esos factores debe ser cero.

Teniendo en cuenta que,

$$5 \neq 0$$

y

$$e^{5-2x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

Entonces,

$$1 - 2x = 0$$

Luego,

$$x = \frac{1}{2}$$

Importante: no puede afirmarse que en $x = \frac{1}{2}$ haya un máximo relativo o local. Debe usarse la condición suficiente para probarlo. A tal fin se analiza el signo de la derivada primera en un entorno del punto crítico según se ha estudiado en la Unidad 5, Estudio de Funciones.
Se eligen 2 puntos "lo suficientemente cerca" del punto crítico (a izquierda y derecha) y se analiza la variación de signo de la función derivada primera.

Entonces,

en $x = 0$ (a izquierda)

$$f'(0) = 5 \cdot e^{5-2 \cdot 0}(1 - 2 \cdot 0)$$
$$f'(0) = 5 \cdot e^{5} > 0$$

$f$ es creciente en $x = 0$

en $x = 1$ (a derecha)

$$f'(1) = 5 \cdot e^{5-2 \cdot 1}(1 - 2 \cdot 1)$$

$$f'(1) = 5 \cdot e^{3}(-1) < 0$$

$f$ es decreciente en $x = 1$

Efectivamente, la función alcanza un máximo local en:

$$\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

---

**2. El valor de a $\in \mathbb{R}$ para que la derivada de la función $f(x) = ln(ax^2 - 8)$ en $x = 2$ sea 2 es:**

a) $17/8$
b) $4$ **CORRECTA**
c) $2$
d) $1/8$

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 6, Derivadas (Sesión 8), para el cálculo de la función derivada aplicamos la regla de la cadena por tratarse de una función compuesta.
Entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{ax^2 - 8} \cdot 2ax$$

Teniendo en cuenta que,

$$f'(2) = 2$$

$$\frac{1}{a \cdot 2^2 - 8} \cdot 2a \cdot 2 = 2$$

$$\frac{4a}{4a - 8} = 2$$

$$4a = 2(4a - 8)$$

$$4a = 8a - 16$$

$$-4a = -16$$

$$a = 4$$

---

**3. El $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x^2+4x-6}{-7x^3+2x}\right)^2\right]$, es igual a:**

a) 0 **CORRECTA**
b) $-\infty$
c) $+\infty$
d) $No\ existe$

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 4, Nociones de Límite y Continuidad (Sesión 6), Límites indeterminados, aplicando propiedades estudiadas de los límites queda,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-6}{-7x^3+2x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-6}{-7x^3+2x}\right)\right)^2$$

Resulta una indeterminación del tipo cociente de infinitos en la base de la potencia 2. Luego,

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-6}{-7x^3+2x}\right)\right)^2 = \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\left(2+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(-7x+\frac{2}{x}\right)}\right)\right)^2$$

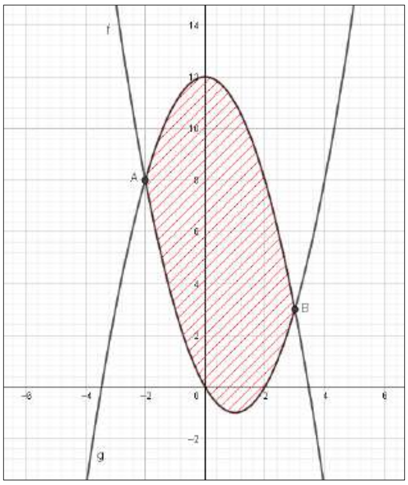
Simplificando $x^2$, cuando $x\to\infty$ el numerador tiende a $2$ y el denominador tiende a infinito, luego el cociente tiende a cero. Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-6}{-7x^3+2x}\right)^2=0^2=0$$

---

**4. Hallar el área de la región del plano limitada por las las gráficas de las funciones:**

$\boldsymbol{f(x)=x^2-2x}$ **y** $\boldsymbol{g(x)=12-x^2}$**.**




De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 6, Integrales (sesión 9), Cálculo de áreas, se requiere el cálculo previo de los puntos de intersección de las gráficas de ambas funciones. Para ello, se calculan los valores de $x$ tales que:

$f(x)=g(x)$

Reemplazando,

$x^2-2x=12-x^2$

$2x^2-2x-12=0$

Dividiendo miembro a miembro por 2 resulta,

Aplicando la fórmula resolvente, se obtienen los valores que satisfacen la ecuación (raíces reales y distintas porque el discriminante es positivo)

Luego,

$x_1=-2$

$x_2=3$

A partir de la observación del gráfico y el recinto sombreado se llega a la conclusión que el mismo está limitado superiormente por $g(x)=12-x^2$ e inferiormente por $f(x)=x^2-2x$, luego, la integral que resuelve el problema es:

$$\int_{-2}^{3}[g(x)-f(x)]dx$$

Entonces,

$$\int_{-2}^{3}\left[12-x^2-(x^2-2x)\right]dx$$

$$\int_{-2}^{3}\left(-2x^2+2x+12\right)dx$$

Integrando (se omite la constante de integración pues se cancela al efectuar la resta) y aplicando la regla de Barrow resulta,

$$-\frac{2}{3}x^3+x^2+12x\Big|_{-2}^{3}=\left[-\frac{2}{3}\cdot 3^3+3^2+12\cdot 3\right]-\left[-\frac{2}{3}(-2)^3+(-2)^2+12(-2)\right]$$

Efectuando los cálculos queda,

$$\int_{-2}^{3}\left[12-x^2-(x^2-2x)\right]dx=\frac{125}{3}$$

---

**5. Se quieren colocar en una estantería 4 libros de Matemática, 6 de Física y 2 de Química ¿De cuántas maneras pueden colocarse si los libros de cada materia han de estar juntos?**

a) 34.560
b) 207.360 **CORRECTA**
c) 1320
d) 13.860

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 8, Combinatoria (Sesión 11), debe calcularse primero la cantidad de formas de colocar cada tipo de libro en la estantería prescindiendo de los restantes.
Para los libros de matemática, la cantidad de maneras es:

$$P_4=4!=24$$

Para los de física,

$$P_6=6!=720$$

Para los de química,

$$P_2=2!=2$$

A su vez hay $P_3=3!=6$ formas de ubicar los tres tipos de libros (matemática, física y química) de tal forma que queden juntos los de la misma temática (considerándolos como si fuesen solo un libro)

Entonces, la cantidad de maneras de colocar los libros en la estantería es:

$$P_4\cdot P_6\cdot P_2\cdot P_3=4!\cdot 6!\cdot 2!\cdot 3!=24\cdot 720\cdot 2\cdot 6=207.360$$

**6. Dados los vectores $\vec{u} = (1;2;-5), \vec{v} = (-1;1;1), \vec{w} = (3;-1;1)$ el valor del producto mixto $\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{w})$ es:**

a) $-20$ **CORRECTA**
b) $-30$
c) $23$
d) $-23$

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 10, Vectores (Sesión 13), comenzamos calculando el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{w}$ (está indicado entre paréntesis, luego debe realizarse antes de efectuar el producto escalar)

$$\vec{u} \times \vec{w} = (1;2,-5) \times (3;-1;1) = (2 \cdot 1 - (-5) \cdot (-1); (-5) \cdot 3 - 1 \cdot 1; 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = (-3;-16;-7)$$

A continuación calculamos el producto escalar,

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = (-1;1;1) \cdot (-3;-16;-7) = (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-16) + 1 \cdot (-7) = -20$$

---

**7. Hallar las raíces reales de la siguiente función exponencial $f(x) = 3^{x+1} - 3^{2x-2}$**

a) $x_1 = 27$
b) $x_1 = 3$ **CORRECTA**
c) $x_1 = 3, x_2 = 0$
d) $x_1 = -1, x_2 = 1$

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 3, Funciones especiales (Sesión 5), Función exponencial, resulta:

$$f(x) = 0$$

$$3^{x+1} - 3^{2x-2} = 0$$

Recordando la propiedad del producto de potencias de igual base,

$$3^x \cdot 3 - 3^{2x} \cdot 3^{-2} = 0$$

Aplicando la propiedad de la potencia de una potencia en el segundo término del primer miembro resulta,

$$3^x \cdot 3 - (3^x)^2 \cdot 3^{-2} = 0$$

Asignando $p = 3^x$

$$p \cdot 3 - p^2 \cdot 3^{-2} = 0$$

Queda una ecuación cuadrática en la nueva variable $p$

$$-\frac{1}{9} p^2 + 3p = 0$$

Factorizando,

$$p\left(-\frac{1}{9}p+3\right)=0$$

$$p_1=0$$

$$-\frac{1}{9}p+3=0$$

$$p_2=27$$

Entonces,

$3^x=0$ , ecuación que no tiene solución y,

$3^x=27$ , de donde surge el resultado:

$x=3$

---

**8. El/los valores de $a \in R$ (si existen) para los cuales el sistema resulta incompatible son:**

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) $a=2$
b) $a=0$
c) $a=2$ , $a=1$
d) $a=1$ **CORRECTA**

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 9: Sistemas de ecuaciones y matrices (Sesión 12), se procede a armar la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A partir del método de eliminación de Gauss, utilizando operaciones elementales entre las filas con el objetivo de expresarla en forma escalonada resulta,

$$F_1-F_3 \rightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

$$2F_1-F_2 \rightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 2-a & a-2 \\ 0 & 1-a & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

Luego,

$1-a=0$

Entonces resulta,

$a=1$

Reemplazando en la matriz ampliada queda,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Puede escribirse el sistema equivalente al dado:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad y+z=-1 \\ \qquad 0=-1 \end{cases}$$

Efectivamente, se trata de un sistema incompatible, según puede apreciarse en la tercera igualdad.

A partir del cálculo de los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, por aplicación del teorema de Rouché – Fröbenius, se comprueba de manera sencilla.

---

**9. Calcular $\int \boldsymbol{e^{3x}(1+3x)\,dx}$**

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 6, Integrales (Sesión 9), Métodos de integración, conviene aplicar el método de integración por partes.

La fórmula es:

$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ **(1)**

Entonces,

$u=1+3x$

$du=3\,dx$

$dv=e^{3x}\,dx$

$$v=\frac{e^{3x}}{3}$$

Reemplazando en **(1)** resulta,

$$\int e^{3x}(1+3x)\,dx=(1+3x)\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}\cdot 3\,dx$$

Luego de simplificar, la integral que queda es más sencilla de calcular (ése es el objetivo del método de integración por partes)

$$\int e^{3x}(1+3x)\,dx=(1+3x)\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int e^{3x}\,dx \quad \textbf{(2)}$$

Se procede al cálculo de la integral mediante el método de sustitución o cambio de variable,

$$\int e^{3x}dx \quad \textbf{(3)}$$

$$w=3x$$

$$dw=3\,dx$$

$$\frac{dw}{3}=dx$$

Reemplazando en **(3)** resulta,

$$\int e^{3x}dx=\int e^{w}\,\frac{dw}{3}=\frac{1}{3}\int e^{w}dw=\frac{1}{3}\cdot e^{w}+K=\frac{1}{3}e^{3x}+K$$

Entonces reemplazando en **(2)** queda,

$$\int e^{3x}(1+3x)\,dx=(1+3x)\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int e^{3x}\,dx=(1+3x)\frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}e^{3x}+K$$

Puede manipularse algebraicamente el resultado obtenido. En efecto,

$$(1+3x)\frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}e^{3x}+K=\frac{e^{3x}}{3}+3x\frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}e^{3x}+K=x\cdot e^{3x}+K$$

En definitiva, cancelando los términos primero y tercero resulta:

$$\int e^{3x}(1+3x)\,dx=x\cdot e^{3x}+K$$

<u>Observación</u>: puede verificarse efectuando la derivación del resultado obtenido.