Matemática

Clave de corrección primer parcial

Segundo turno – Tema 4 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-1; 3)$ y es paralela a la recta $y = 2x + 1$. La recta hallada, ¿pasa por el origen de coordenadas?

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta que buscamos.
Por ser paralela a la recta $y = 2x + 1$ sabemos que $m = 2$. Por otro lado, como pasa por el punto $A = (-1; 3)$, sabemos que $3 = m(-1) + b$.

Entonces:

$m = 2$

$3 = 2(-1) + b \quad \leftrightarrow \quad 3 = -2 + b \quad \leftrightarrow \quad b = 5$

La ecuación de la recta es

$y = 2x + 5$

Para responder si pasa por el origen de coordenadas debemos verificar si pasa por el punto $(0; 0)$, pero cuando $x = 0$ tenemos que $y = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \neq 0$, la recta no pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dadas las funciones

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 8 \qquad g(x) = bx + 3$$

hallar el valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ si se sabe que $g \circ h^{-1}(2) = 4$

En primer término hallamos la función inversa de h.

Partiendo de $y = \frac{1}{2}x + 8$ despejamos la expresión de x:

$$y - 8 = \frac{1}{2}x$$
$$2(y - 8) = x$$
$$2y - 16 = x$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$h^{-1}(x) = 2x - 16$$

Ahora hallamos la expresión de la función $g \circ h^{-1}$

$$g \circ h^{-1}(x) = g\left(h^{-1}(x)\right) = b(2x - 16) + 3$$

Entonces,

$$g \circ h^{-1}(2) = 4$$
$$b(2 \cdot 2 - 16) + 3 = 4$$
$$-12b + 3 = 4$$
$$-12b = 1$$
$$b = -\frac{1}{12}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar la ecuación y las coordenadas del vértice de la parábola cuyas raíces son $\boldsymbol{x = -2}$ y $\boldsymbol{x = 4}$, y además pasa por el punto $\boldsymbol{Q = (3; -10)}$.

La parábola tiene como raíces a $x = -2$ y $x = 4$. Entonces, podemos expresar la ecuación como:

$$y = a(x - (-2))(x - 4)$$
$$y = a(x + 2)(x - 4)$$

Para hallar el valor de la constante "a" usamos la información de que pasa por el punto $(3; -10)$:

$$-10 = a(3 + 2)(3 - 4)$$
$$-10 = a(5)(-1)$$
$$-10 = -5a \quad \rightarrow \quad a = 2$$

La ecuación de la parábola es $y = 2(x + 2)(x - 4) = 2x^2 - 4x - 16$

Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = \frac{-2+4}{2} = 1$$
$$y_v = 2(1+2)(1-4) = -18$$

$Vértice = (1; -18)$

Otra forma de hallar la coordenada "x" del vértice:

$$y = 2(x+2)(x-4) = 2(x^2 - 4x + 2x - 8) = 2x^2 - 4x - 16$$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot (2)} = 1$$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola.

Como pasa por los puntos $(3; -10)$, $(-2; 0)$ y $(4; 0)$ tenemos que

$$0 = a(-2)^2 + b(-2) + c \quad \rightarrow \quad 0 = 4a - 2b + c$$
$$0 = a(4)^2 + b(4) + c \quad \rightarrow \quad 0 = 16a + 4b + c$$
$$-10 = a(3)^2 + b(3) + c \quad \rightarrow \quad -10 = 9a + 3b + c$$

Llegamos a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$0 = 4a - 2b + c \qquad (1)$$
$$0 = 16a + 4b + c \qquad (2)$$
$$-10 = 9a + 3b + c \qquad (3)$$

Despejamos c de la ecuación (1)

$$c = -4a + 2b$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) y despejando b

$$0 = 16a + 4b + (-4a + 2b) \quad \rightarrow \quad 0 = 16a + 4b - 4a + 2b \quad \rightarrow 0 = 12a + 6b$$

$$\therefore \quad b = -2a$$

Como

$$c = -4a + 2b \quad \rightarrow \quad c = -4a + 2(-2a) \quad \therefore \quad c = -8a$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3)

$$-10 = 9a + 3(-2a) + (-8a)$$
$$-10 = 9a - 6a - 8a \qquad \rightarrow \qquad a = 2$$
$$\therefore \quad b = -4 \quad , \quad c = -16$$

La ecuación de la parábola es $y = 2x^2 - 4x - 16$

Hallamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2 \cdot (2)} = -1$$

$y_v = 2(-1)^2 - 4(-1) - 16 = -18$ $Vértice = (-1; -18)$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{4x-5}{x-2} \leq 2 - x\right\}$$

Resolvemos la inecuación:

$$\frac{4x-5}{x-2} \leq 2 - x$$

$$\frac{4x-5}{x-2} - 2 + x \leq 0$$

$$\frac{4x-5-2(x-2)+x(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{4x-5-2x+4+x^2-2x}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-1}{x-2} \leq 0$$

El cociente es un número menor o igual a cero si:

- $\boldsymbol{x^2 - 1 \leq 0}$ **y** $\boldsymbol{x - 2 > 0}$

  $x^2 - 1 \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad |x| \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x \in [-1; 1]$

  $x - 2 > 0 \quad \leftrightarrow \quad x > 2 \quad \leftrightarrow \quad x \in (2; +\infty)$

  Las dos condiciones deben satisfacerse simultáneamente:

  $$[-1; 1] \cap (2; +\infty) = \emptyset$$

  No existen valores de x para que se cumplan las dos condiciones simultáneamente.

- $\boldsymbol{x^2 - 1 \geq 0}$ **y** $\boldsymbol{x - 2 < 0}$

  $x^2 - 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad |x| \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

  $x - 2 < 0 \quad \leftrightarrow \quad x < 2 \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 2)$

  Las dos condiciones deben satisfacerse simultáneamente:

  $[(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)] \cap (-\infty; 2) = (-\infty; -1] \cup [1; 2)$

Finalmente:

$M = [(-\infty; -1] \cup [1; 2)] \cup \emptyset = \ [(-\infty; -1] \cup [1; 2)]$