UBA
Universidad de Buenos Aires

UBAXXI

Matemática

Clave de corrección primer parcial

Primer turno – Tema 4 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar, si existe, el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}ax + 3$ y la recta que pasa por los puntos $A = (3; 3)$ y $B = (6; 5)$ sean paralelas.

Primero hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (3; 3)$ y $B = (6; 5)$. La ecuación de esta recta es de la forma $y = mx + b$.

Especializando en los puntos $A = (3; 3)$ y $B = (6; 5)$ tenemos que:

$$3 = 3m + b$$
$$6 = 5m + b$$

Restando las ecuaciones llegamos a

$$-2 = -3m$$
$$\frac{2}{3} = m$$

Entonces,

$$3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + b \quad \leftrightarrow \quad 3 = 2 + b \quad \leftrightarrow \quad 1 = b$$

La ecuación de la recta es

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

Como las rectas deben ser paralelas, las pendientes deben ser iguales:

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a \quad \leftrightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función

$$g(x) = \frac{-ax}{x-4}$$

hallar los valores de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que $g^{-1}(1) = 2a$

En primer término hallamos la función inversa de g.

Partiendo de

$$y = \frac{-ax}{x-4}$$

Despejamos la expresión de x:

$$y(x-4) = -ax$$
$$xy - 4y = -ax$$
$$xy + ax = 4y$$
$$x(y+a) = 4y$$
$$x = \frac{4y}{y+a}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$g^{-1}(x) = \frac{4x}{x+a}$$

Como $g^{-1}(1) = 2a$

$$2a = \frac{4 \cdot (1)}{(1) + a}$$
$$2a = \frac{4}{1+a}$$
$$(1+a) \cdot 2a = 4$$
$$2a^2 + 2a = 4$$
$$2a^2 + 2a - 4 = 0$$
$$a^2 + a - 2 = 0$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles: $a = 1$ y $a = -2$.

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $g^{-1}(1) = 2a$ entonces $g\left(g^{-1}(1)\right) = g(2a)$, pero como $g\left(g^{-1}(1)\right) = 1$ tenemos que

$$g(2a) = 1$$
$$\frac{-a(2a)}{2a-4} = 1 \quad (a \neq 2)$$
$$-2a^2 = 2a - 4$$
$$-2a^2 - 2a + 4 = 0$$
$$a^2 + a - 2 = 0$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles: $a = 1$ y $a = -2$.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la ecuación y las raíces de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (1; -2)$ y pasa por el punto $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$

Si conocemos las coordenadas del vértice, la ecuación de la parábola la podemos expresar como

$$y = a \cdot (x-1)^2 + (-2)$$
$$y = a \cdot (x-1)^2 - 2$$

Para hallar el valor de la constante "a" usamos la información de que pasa por el punto $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$:

$$-\frac{3}{2} = a \cdot (0-1)^2 - 2$$
$$-\frac{3}{2} = a - 2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola.

Como pasa por el punto $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ tenemos que

$$-\frac{3}{2} = a(0)^2 + b(0) + c \quad \rightarrow \quad c = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx - \frac{3}{2}$$

La coordenada x del vértice se puede calcular como

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad 1 = -\frac{b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad b = -2a \quad \rightarrow \quad y = ax^2 - 2ax - \frac{3}{2}$$

Por último, para despejar el valor de la constante "a" usamos que

$$y_v = ax_v^2 - 2ax_v - \frac{3}{2}$$
$$-2 = a(1)^2 - 2a(1) - \frac{3}{2}$$
$$-2 = a - 2a - \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad b = -1$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dados los conjuntos

$$M = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x-3)^2 + 1 < 10\} \qquad N = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 3x\right\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto $C \cap D$.

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto M:

$$(x-3)^2 + 1 < 10$$
$$(x-3)^2 < 9$$
$$\sqrt{(x-3)^2} < \sqrt{9}$$
$$|x-3| < 3$$
$$-3 < x - 3 < 3 \quad \leftrightarrow \quad 0 < x < 6 \quad \rightarrow \quad x \in (0;6)$$

Por lo tanto, $M = (0;6)$

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto N:

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 3x$$
$$2x + 1 > 3x$$
$$2x - 3x > -1$$
$$-x > -1 \quad \leftrightarrow \quad x < 1 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty;1)$$

Por lo tanto, $N = (-\infty; -1)$

Entonces:

$M \cap N = (0;6) \cap (-\infty;1) = (0;1)$

$M \cap N = (0;1)$