

MATEMÁTICA PARA AGRONOMÍA Y CIENCIAS AMBIENTALES

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER EXAMEN PARCIAL – TEMA 1

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Siendo $P = (3; 0)$, hallar todos los puntos de la forma $Q = (a; b)$ si se sabe que $|b| = 1$ y la distancia entre ambos puntos es $\sqrt{2}$

Resolución:

Como $|b| = 1$, las coordenadas del punto Q pueden ser de la forma

$$(a; 1) \text{ ó } (a; -1)$$

Por otro lado, la distancia entre ambos puntos es $\sqrt{2}$.

Aplicando la fórmula que permite determinar la distancia entre ambos puntos, obtenemos:

- Si $Q = (a; 1)$

$$d_{PQ} = \sqrt{(3 - a)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(3 - a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(3 - a)^2 + 1}$$

- Si $Q = (a; -1)$

$$d_{PQ} = \sqrt{(3 - a)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{(3 - a)^2 + 1^2} = \sqrt{(3 - a)^2 + 1}$$

Por lo tanto, independientemente del valor de la ordenada del punto Q , se debe verificar que:

$$\sqrt{(3 - a)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Resolvemos la ecuación planteada:

$$(3 - a)^2 + 1 = 2$$

$$(3 - a)^2 = 1$$

$$|3 - a| = 1$$

De lo anterior, por definición de módulo, tenemos dos posibilidades:

$$3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$3 - a = -1 \Rightarrow a = 4$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto Q pueden ser:

$$(2; 1) \text{ ó } (4; 1) \text{ ó } (2; -1) \text{ ó } (4; -1)$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

La función $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx) + 1$ (**A y B son constantes positivas**) tiene como conjunto imagen al intervalo $[-2; 4]$ y su período es π . Hallar los valores de las constantes A, B u los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 4$

Resolución:

Empezamos determinando los valores de las constantes A y B.

Para esto, sabemos que el período de la función es π y que se obtiene haciendo $\frac{2\pi}{|B|}$

Por lo tanto:

$$\frac{2\pi}{|B|} = \pi \Rightarrow 2\pi = \pi \cdot |B| \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi} = |B| \Rightarrow 2 = |B|$$

Es decir que $B = 2$ ó $B = -2$

Como en el enunciado se especifica que B es una constante positiva, necesariamente **$B = 2$** \Rightarrow
 $f(x) = A \cdot \text{sen}(2x) + 1$

Por otro lado, sabemos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $[-2; 4]$ y la forma de la función es: $f(x) = A \cdot \text{sen}(2x) + 1$

El "+1" indica que tiene un corrimiento de un lugar hacia arriba sobre el eje y. Como en el enunciado aclaran que A es una constante positiva, el conjunto imagen de la función, podemos pensarlo como $[-A + 1; A + 1]$

Esto implica que:

$$-A + 1 = -2 \Rightarrow \mathbf{A = 3}$$

$$A + 1 = 4 \Rightarrow \mathbf{A = 3}$$

Por lo tanto, la función es: $f(x) = 3 \cdot \text{sen}(2x) + 1$

Nos piden determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde $f(x) = 4$; para esto, resolvemos:

$$3 \cdot \text{sen}(2x) + 1 = 4$$

$$3 \cdot \text{sen}(2x) = 3$$

$$\text{sen}(2x) = 1$$

$$2x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \Leftrightarrow \mathbf{x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$g(x) = 2^x - 1 ; h(x) = x + 3$$

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$f(x) = (g \circ h)(x) = 0$$

Resolución:

Empezamos por encontrar la expresión de $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[x + 3] = 2^{x+3} - 1$$

Por lo tanto, tenemos que $f(x) = 2^{x+3} - 1$

Determinamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $f(x) = 0$:

$$2^{x+3} - 1 = 0$$

$$2^{x+3} = 1$$

$$2^{x+3} = 2^0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, sabiendo que la función

$$f(x) = 3 + \frac{4 - 6x}{ax + b}$$

tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y que $f(0) = 7$

Resolución:

Por un lado, sabemos que $f(0) = 7$, entonces:

$$3 + \frac{4 - 6 \cdot 0}{a \cdot 0 + b} = 7$$

$$3 + \frac{4}{b} = 7$$

$$\frac{4}{b} = 4$$

$$4 = 4 \cdot b$$

$$1 = b$$

Es decir,

$$f(x) = 3 + \frac{4 - 6x}{ax + 1}$$

Por otro lado, sabemos que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{4 - 6x}{ax + 1} \right] = 1$$

Por propiedad del límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1} \right) = 1$$

$$3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1} \right) = -2$$

Al calcular el límite en la función, se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pero sabemos que, al salvarla, obtenemos 2 como resultado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x \cdot \left(\frac{4}{x} - 6 \right)}{x \cdot \left(a + \frac{1}{x} \right)} \right] = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4}{x} - 6}{a + \frac{1}{x}} \right) = -2$$

En el numerador, cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{4}{x} \rightarrow 0$. Por lo tanto, el numerador tiende a “-6”

En el denominador, cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ por lo tanto, el denominador tiende a “a”

Esto significa que:

$$\frac{-6}{a} = -2 \Rightarrow a = 3$$

De lo anterior, se obtiene que

$$f(x) = 3 + \frac{4 - 6x}{3x + 1}$$