Anális ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66) 2do PARCIAL 1er CUATRIMESTRE DE 2023 Tema 2

APELLIDO [redacted]....... NOMBRES [redacted]........ DNI [redacted].

NOTA del 1er parcial: 6

INSCRIPTO EN:

SEDE: Ciudad Uni	DÍAS: [redacted]
HORARIO: [redacted]	AULA: [redacted]

1	2	3	4	NOTA
B-	B-	B	B	9+ (Nueve)

PROMOCIONA	RECUPERA: Jueves 13-07 1ro | 2do
INSUFICIENTE	FINAL: - ó -

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y $p(x) = 1 + x - 3x^2$ su polinomio de Tayl
orden 2 centrado en $x_0 = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de segundo orden en $x_1 =$
$g(x) = f(x^2 - x + 1) + \int_1^{2x+1} f(t)dt$.

2. Hallar una función f que satisfaga $f'(x)f^6(x) = 5x\cos(x)f^4(x)$ y $f(0) = -3$.

3. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de $f(x) = \dfrac{x-4}{x}$ y $g(x) = x(x-4)$ para $x \geq 1$.

4. Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} x^n$ es convergente.

Scanned with CamScanner

[redacted]

① T_2 de $f(x)$ en $(x_0=1)$ $\Rightarrow$ $p(x)=1+x-3x^2$ $\Rightarrow$ $p'=f'$.

Buscar T_2 en $(x_1=0)$ de $g(x)=f(x^2-x+1)+\int_1^{2x+1} f(t)\cdot dt$.

Con $p(x)$ sabemos que

$$\begin{cases} f(1)=-1 \\ f'(1)=-5 \\ \frac{f''(1)}{2!}=-6 \Rightarrow -3 \end{cases}$$

$f''(1)=-6$.

$$q(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2$$

$$g(0)=f(0^2-0+1)+\int_1^{2\cdot0+1} f(t)\cdot dt$$

① Sabemos que $f(1)=p(1)$ y $p'(1)=f'(1)$ y $p''(1)=f''(1)$

$p'(x)=1-6(x+0)$ entonces $f'(x)=1-6x$

$p''(x)=-6$ entonces $f''(x)=-6$

} op, solo en $x=1$.

$$g'(x)=f'(x^2-x+1)\cdot(2x-1)+f(2x+1)\cdot 2$$

$$g'(0)=f'(0^2-0+1)\cdot(2\cdot0-1)+f(2\cdot0+1)\cdot2$$

$$g'(0)=f'(1)\cdot-1+f(1)\cdot2 \Rightarrow \underbrace{-5\cdot-1}_{5}+(1)\cdot2=\boxed{\cancel{7}}=-3$$

$5-2$ $\quad -2$

$$g''(x)=f''(x^2-x+1)\cdot(2x-1)^2+f'(x^2-x+1)\cdot2+f'(2x+1)\cdot2\cdot2+\cancel{f'(2x+1)\cdot0}$$

$$g''(0)=f''(0^2-0+1)\cdot(2\cdot0-1)^2+f'(0^2-0+1)\cdot2+f'(2\cdot0+1)\cdot4$$

$$g''(0)=f''(1)\cdot1+f'(1)\cdot2+f'(1)\cdot4$$

$$g''(0)=\underset{-6}{-3}\cdot1+-5\cdot2+-5\cdot4=-3+(-10)+(-20)=\boxed{-33}$$

$$g(x)=f(x^2-x+1)+\int_1^{2x+1} f(t)\cdot dt$$

$$g(0)=f(1)+\int_1^{2\cdot0+1} f(t)\,dt$$

$$g(0)=-1+\int_1^1 f(t)\,dt \Rightarrow 1+0=\boxed{1}$$

T_2 en $(x_0=0)$ de $g(x)$ es $\ulcorner -1+7x+\frac{33}{2}x^2 \lrcorner$

② $f'(x) \cdot f(x)^6 = 5x\cos(x) \cdot f(x)^4$ $\qquad f(0) = -3$

$$\underbrace{\int \frac{f'(x) \cdot f(x)^6}{f(x)^4}}_{A} = \underbrace{\int 5x\cos(x)}_{B}$$

Ⓐ $\int \frac{f'(x) \cdot f(x)^6}{f(x)^4} \cdot dx = \int \frac{1}{f(x)^4} \cdot f'(x) \cdot f(x)^6 \cdot dx \overset{*}{=} \int \frac{1}{u^4} \cdot u^6 \cdot du = \int u^2 \cdot du$

Sustitucion
$u = f(x)$
$du = f'(x) \cdot dx$

$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{f(x)^3}{3} + C$

Ⓑ $\int 5x\cos(x) = 5\int x\cos(x) = 5\left(\operatorname{Sen}(x) \cdot x - \int 1 \cdot \operatorname{Sen}(x) \cdot dx\right)$ ①

Partes
$g'(x) = \cos(x)$ $\quad g(x) = \operatorname{Sen}(x)$
$f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$

$5(\operatorname{Sen}(x) \cdot x + \cos(x)) + C$

Sigo A = B

$\frac{f(x)^3}{3} + C_2 = 5(\operatorname{Sen}(x) \cdot x + \cos(x)) + C_1$

$\frac{f(x)^3}{3} = 5(\operatorname{sen}(x) \cdot x + \cos(x)) + k$

$f(x)^3 = (5(\operatorname{sen}(x) \cdot x + \cos(x)) + k) \, 3$

$f(x) = \sqrt[3]{15(\operatorname{Sen}(x) \cdot x + \cos(x)) + H}$

Auxiliar
$k = C_1 - C_2$
$H = k \cdot 3$

Buscamos H

$\left(\sqrt[3]{15(\operatorname{sen}(0) \cdot 0 + \cos(0)) + H}\right)^3 = (-3)^3$

$15(\;0 \;+\; 1\;) + H = -27$

$15 + H = -27$

$\boxed{H = -42}$

$-27 - 15 = -42$

$H = k \cdot 3$
$-42 = k \cdot 3$
$\boxed{-4 = k}$

Respuesta
$H = -42$
$k = -4$

Bien.

⑤ $f(x) = \frac{x-4}{x}$ $g(x) = x(x-4)$

Busco intersecciones

$$\frac{x-4}{x} = x(x-4)$$

$$\frac{1}{x} \cdot (x-4) - x \cdot (x-4) = 0$$

$$(x-4)\left(\frac{1}{x} - x\right) = 0$$

$x - 4 = 0$ o $\frac{1}{x} - x = 0$

$\boxed{x = 4}$

$$\frac{1}{x} = x$$

$1 = x^2$ → $x = -1$ No lo hacemos por $x \geq 1$?

$\boxed{1 = x}$

Busco techo y piso → Bolsano

$\left.\begin{array}{l} f(2) = -1 \\ g(2) = -4 \end{array}\right\}$ f es techo, g es piso

Busco el Area

$$\int_1^4 \frac{x-4}{x} - x(x-4)\, dx = \underbrace{\int_1^4 \frac{x-4}{x}\, dx}_{A} - \underbrace{\int_1^4 x(x-4)\, dx}_{B}$$

Ⓐ $\int_1^4 \frac{x-4}{x}\, dx = \int_1^4 \frac{1}{x}(x-4)\, dx = \int_1^4 \frac{x}{x} - \frac{4}{x}\, dx = \int_1^4 1\, dx - \int_1^4 \frac{4}{x}\, dx$ ⊛

⊛$_1$ $x\Big|_1^4 - 4\int_1^4 \frac{1}{x} = x\Big|_1^4 - 4 \cdot \ln(x)\Big|_1^4 = (4 - 4 \cdot \ln(4)) - (1 - 4 \cdot \ln(1))$ ⊛

⊛$_2$ $4 - 4 \cdot \ln(4) - 1 = 3 - 4 \cdot \ln(4)$

(B) $\int_1^4 x(x-4)\,dx = \int_1^4 x^2-4x = \int_1^4 x^2 - 4\int_1^4 x = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}$

(*) $\left(\frac{4^3}{3} - 4\cdot\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4\,\frac{1^2}{2}\right) = \frac{64}{3} - \frac{64}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{2} = -9$

Area total $\to$ A + B

$3 - 4.\ln(4) - (-9) = \underbrace{3 - 4.\ln(4) + 9} \cong 6,4548$

Excelente.

5 (4)

$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} x^n$

C. Cauchy

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n}\ \sqrt[n]{\left(\left(\frac{n}{n+4}\right)^5\right)^n}\ \sqrt[n]{x^n}$

$\lim_{n\to\infty} 5 \left(\frac{n}{n+4}\right)^5 |x|$

CA: $\frac{4}{\infty} = 0$, $(1+0)^5 = 1^5 = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^5 5|x| \to \lim_{n\to\infty} 1.5|x|$

Por el C. Cauchy $\quad -1 \le 5.|x| \le 1$

$-\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{5}$

Vemos extremos

$x = -1/5$

$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} -\frac{1}{5}^n \to -\frac{5}{5}^n \left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} \to (-1)^n \underbrace{\left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n}}_{a_n}$

Criterio de Leibniz

① es no negativo ☑

② $\lim a_n = 0$ ☒

③ —

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} \to \left(1+\frac{n}{n+4}-1\right)^{5n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{n+4}-\frac{n+4}{n+4}\right)^{5n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\cancel{n}-\cancel{n}-4}{n+4}\right)^{5n}$

Sigo en otra hoja

[redacted] Hoja 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4}{n+4}\right)^{5n} \to \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-4}}\right)^{\frac{n+4}{-4}}\right]^{\frac{-4}{n+4}\cdot 5n} = e^{-20}$$

CA

$$\frac{-4}{n+4}\cdot 5n = \frac{-20\cancel{n}}{\cancel{n}\underbrace{(1+4/n)}_{\to 0}} = \frac{-20}{1} = 20$$

Entonces por criterio de ~~B~~ Cobie $x = -\frac{1}{5}$ diverge.

$X = \frac{1}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n}\left(\frac{1}{5}\right)^n \to 1^n\cdot\left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} \to \frac{n^{5n}}{(n+4)^{5n}}\cdot 1^n = \frac{\cancel{n^{5n}}}{\cancel{n^{5n}}(1+4/n)^{5n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+4/n)^{5n}} = 1$$ $\to$ por Convenencia necesaria $x = 1/5$ diverge

Maniobras

Querido poner "condición"? ?

CA $1^{\infty} = 1$ y $(1+\overbrace{4/n}^{\to\infty})^{5n} \to (1+0)^{\infty} = 1^{\infty} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\left(\frac{n}{n+4}\right)^{5n} x^n$$ Converge entre $\left(-\frac{1}{5} ; \frac{1}{5}\right)$

Muy bien