B ÁLGEBRA A (62) $1^{er}$ PARCIAL $2^{do}$ CUATRIMESTRE de 2019 | Tema 2 |

APELLIDO [redacted]... NOMBRES [redacted]

| 1 | 2 | 3 | 4 | NOTA |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B = | 9 (nueve) |

CORRECTOR: C

INSCRIPTO EN:

| | |
|---|---|
| SEDE: Las Heras | DIAS: Ma-Mi-Vi |
| HORARIO: 10 - 13 hs | AULA: 02 (Anfi) |

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

**1.-** Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z = \overline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^2}$.

**2.-** Sean $\Pi : X = \lambda(-1,3,1) + \mu(1,1,2) + (-1,1,0)$ y $\mathbb{L} : X = \alpha(1,2,1) + (1,0,0)$. Hallar una recta $\mathbb{L}_1 \subset \Pi$ que sea perpendicular y transversal al $\mathbb{L}$.

**3.-** Sea $\Pi$ el plano tal que el simétrico de $(2,5,-3)$ respecto de $\Pi$ es $(3,7,-4)$. Hallar $\Pi$ y encontrar el simétrico de $(0,0,0)$ respecto de $\Pi$.

**4.-** Sea

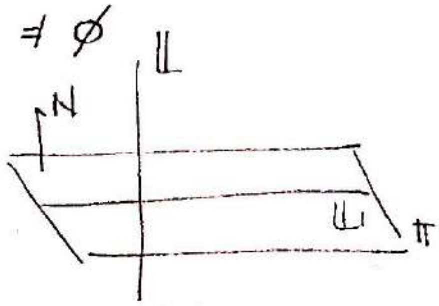
$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + ax_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + (a+3)x_2 + (a-7)x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + (a-1)x_2 + 13x_3 + (a^2-3)x_4 = -4a-9 \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $a$ para los cuales la matriz ampliada del sistema tiene rango 2 y resolver el sistema en dichos casos.

2) $\pi: x = \lambda(-1,3,1) + \mu(1,1,2) + (-1,1,0)$

$\mathbb{L}: x = \alpha(1,2,1) + (1,0,0)$

Hallar $\mathbb{L}_1 \subset \pi$ $\quad \mathbb{L}_1 \perp \mathbb{L}$ $\quad \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$




Paso la ec. del plano a implicita

$$N\pi \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5,3,-4)$$

$-5+9-4=0$
$5+3-8=0$

$\pi: (x,y,z)(5,3,-4) = (5,3,-4)(-1,1,0)$

$\pi: 5x+3y-4z = -5+3$ $\qquad \underline{\pi: 5x+3y-4z=-2}$

El vector dirección de $\mathbb{L}_1$ tiene que ser perpendicular a el vector direccion de $\mathbb{L}$ y a la $N\pi$ simultaneamente. por lo tanto hago el prod. vectorial:

$$\bar{v}\mathbb{L}_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (11;9,7)$$

$55-27-28=0$
$11-18+7=0$

$\mathbb{L}_1: x = \lambda(11,-9,7) + P$

Busco intersección entre $\pi$ y $\mathbb{L}$ para usar como pto de paso

$x \in \mathbb{L} \Rightarrow (\alpha+1, 2\alpha, \alpha)$

Reemplazo en $\pi$ $\qquad 5(\alpha+1)+3(2\alpha)-4\alpha=-2$

$5\alpha+5+6\alpha-4\alpha=-2$

$7\alpha=-7$

$\underline{\alpha=-1}$

$\mathbb{L} \cap \pi = (0,-2,-1)$

Entonces:

$$\boxed{\text{Rta: } \mathbb{L}_1: x = \lambda(11,-9,7) + (0,-2,-1)}$$

Compruebo ¿$\mathbb{L}_1 \subseteq \pi$? $\quad x \in \mathbb{L}_1 \; (11\lambda, -9\lambda-2, 7\lambda-1)$

Reemplazo en $\pi \rightarrow \cancel{55\lambda} - \cancel{27\lambda} - 6 - \cancel{28\lambda} + 4 = -2$

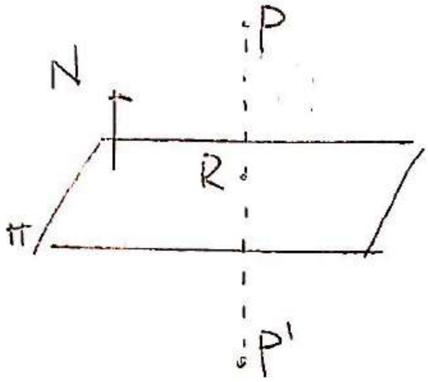
$-2 = -2$

3) $P = (2, 5, -3)$

$P' = (3, 7, -4)$ Lo llamo Q

Hallar $\pi$ y el simétrico de $(0;0;0)$ respecto de $\pi$

Busco el punto medio entre P y P' sabiendo que va a pertenecer a $\pi$




$\frac{1}{2}(P + P') = R$ (punto medio)

$\frac{1}{2}(5, 12, -7) = R$

$R = \left(\frac{5}{2}, 6, -\frac{7}{2}\right)$

$N\pi$ // a la recta que forma $(P' - P)$ → Encuentro esa recta

$(P' - P) = (3, 7, -4) - (2, 5, -3)$

$(P' - P) = (1, 2, -1)$

$\mathbb{L}: x = \lambda(1, 2, -1) + (2, 5, -3)$

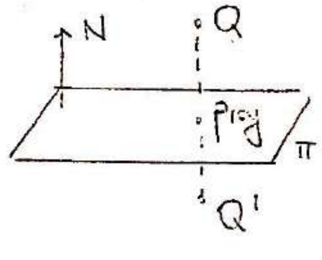
Lo tomo como $N\pi$

$\pi: (x, y, z)(1, 2, -1) = (1, 2, -1)\left(\frac{5}{2}, 6, -\frac{7}{2}\right)$

$\pi: x + 2y - z = \frac{5}{2} + 12 + \frac{7}{2}$

$\pi: x + 2y - z = 18$

Para encontrar el simétrico de Q respecto a $\pi$ primero busco la proy de Q sobre $\pi$




1) construyo una recta $\mathbb{L}' \perp \pi$ que contenga a Q

$\mathbb{L}': x = \alpha(1, 2, -1) + (0, 0, 0)$

2) Busco intersección entre $\mathbb{L}'$ y $\pi$

$x \in \mathbb{L}' \Rightarrow (\alpha, 2\alpha, -\alpha)$

$\alpha + 4\alpha + \alpha = 18$

$6\alpha = 18$

$\alpha = 3$

$\mathbb{L}' \cap \pi = (3, 6, -3)$

Ahora que tengo Q y el punto medio entre Q y su simétrico puedo hallar al simétrico

$Q' = 2\,(3,6,-3) - (0,0,0)$

$Q' = (6,12,-6)$ ✓

Rta: $\pi = x + 2y - z = 16$

El simétrico de $(0,0,0)$ respecto a $\pi$ es $(6,12,-6)$

✓

4) Armo la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & a & 8 & 1 & 0 \\ -1 & a+3 & a-7 & 2 & 5 \\ 3 & a-1 & 13 & a^2-3 & -4a-9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F3 + F1 \to F3 \\ F4 - 3F3 \to F4}]{F2 - 2F1 \to F2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & a+2 & a-2 & 2 & 4 \\ 0 & a+2 & -2 & a^2-3 & -4a-6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F4 - F2 \to F4}]{F3 - F2 \to F3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 & -4a-8 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 - F2 \to F3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -a-2 & a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 & -4a-8 \end{array}\right)$$ ✓

$-a-2=0$
$-2=a$

$a^2=4$
$a=\pm 2$

$-4a=8$
$a=-2$

Si $a=2$ No sirve

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

$Rg(A|b) \neq 2$

$0 = 16$ Abs! ✓

Si $a=-2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$Rg(A|b) = 2$ ✓

Resuelvo el sistema con $a=-2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} -2x_3 &= 2 - x_4 \\ x_3 &= -1 + \frac{x_4}{2} \end{aligned}$$

Reemplazo en 2da ecuación

$$x_1 - x_2 + 5\left(-1 + \frac{x_4}{2}\right) = -\cancel{2}1$$

$$x_1 = 4 + x_2 \cancel{3} - \frac{5}{2} x_4$$

$$x_1 = 3 + x_2 - \frac{5}{2} x_4$$

Falta ver $a=0$

Sol: $\left(4 + x_2 - \frac{5}{2} x_4 ,\ x_2 ,\ -1 + \frac{x_4}{2} ,\ x_4\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sol: } x = x_2(1,1,0,0) + x_4\left(-\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right) + (\cancel{3}4, 0, -1, 0) \\ a = -2\end{array}}$$

1) Hallar sol en $\mathbb{C}$ de

$$z = \overline{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \overline{z^2}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \overline{z^2}$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1 \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow 1e^{i\pi/4}$$

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

$$\overline{z^2} = |z|^2 \cdot e^{i-2\alpha} \qquad |z|e^{i\alpha} = 1e^{i\pi/4} \cdot |z|^2 e^{i-2\alpha}$$

Igualo por un lado los módulos y por el otro los argumentos

Si $z=0$ se cumple la ecuación

Sigo en la otra hoja

Si $z \neq 0$ $\quad \frac{|z|}{|z|^2} = 1$ $\qquad \underline{|z| = 1}$

$\frac{1}{|z|} = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - 2\alpha + 2K\pi$

$3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$

$\alpha = \frac{\frac{\pi}{4} + 2K\pi}{3}$ $\qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$-\frac{\pi}{4} \leq 2K\pi < \frac{23}{4}$

$K = 0, 1, 2$ $\qquad -\frac{1}{8} \leq K < \frac{23}{8}$

Si $K = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$ ✓

Si $K = 1 \rightarrow \alpha = \frac{3}{4}\pi$ ✓

Si $K = 2 \rightarrow \alpha = \frac{17}{12}\pi$ ✓

$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$z = 1\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$

$z = 1\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i \operatorname{sen}\frac{17}{12}\pi\right)$