**UTNBA** **FINAL ANÁLISIS MATEMÁTICO I** **FINAL 14-12-22**

Apellido:............................................Nombre:.......................Legajo:..................

| 1 | | 2 | | 3 | 4 | | 5 | | Calificación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | | a | b | a | b | |
| | | | | | | | | | |

**Condición de aprobación: 50 % del examen correctamente resuelto.**

Corrección:...........................................Revisión:.........................................

**1)** Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique su respuesta:

**a)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^{n+1}} = -\frac{1}{12}$$

**b)** El punto de la curva $C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \wedge t \geq 0$ más cercano al punto $A(3,0)$ es el punto $B(1,1)$

---

**2)** Para la función $g$ definida por tramos:

$$g(x) = \begin{cases} a + bx + cx^2 & si \ x \leq 0 \\ \dfrac{sen(x)}{x} & si \ x > 0 \end{cases}$$

Calcule el valor de las constantes $a, b$ y $c$ tal que la función $g$:

**a)** Sea derivable en $x = 0$.

**b)** Cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, \pi]$

---

**3)** Calcule el valor de la constante $a > 0$ tal que el área del recinto limitado por la curva de $f$, la recta tangente en $(1, f(1))$ y su asíntota sea igual a: $AREA = \pi - 1$. Grafique el recinto.

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2}$$

---

**4)** Dada la función $F$ definida en $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-x}^{0} e^z \, sen(z) \, dz$$

**a)** Obtenga el polinomio de Mc Laurin de grado 2 de $F$

**b)** Calcule $F(-\pi)$

---

**5)** Dada la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \, (x-a)^{2n}}{n+2}$$

**a)** Calcule los valores de la constante real $k$ tal que la longitud del intervalo de convergencia sea igual a 4, siendo $a$ una constante real cualquiera.

**b)** Para $k = -1$, ¿la serie es convergente en $x = a + 1$?, justifique

1) a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^n \cdot 6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^n} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^n}{6^n} - \frac{3^n}{6^n} \right) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

Las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ son series geométricas convergentes pues la razón es menor que 1 $\left( \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \text{ y } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \right)$.

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Con lo cual, la resta de ambas series converge de modo tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{12}$$

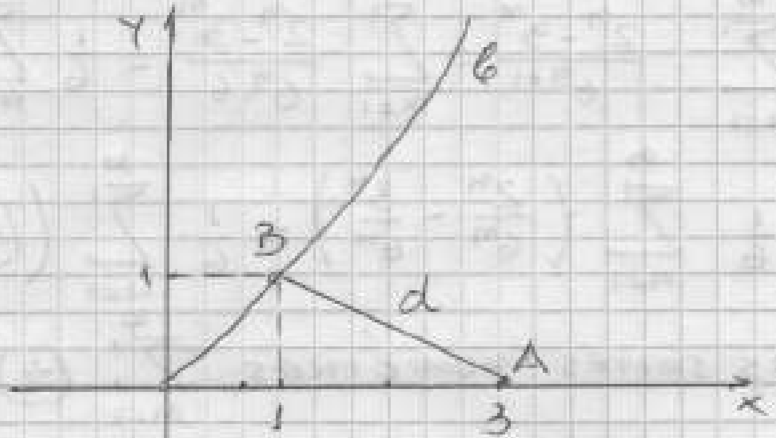
La afirmación es VERDADERA.

1) b)

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}: y = x^2, \ x \geq 0.$$

$A = (3, 0)$

$B = (x, x^2)$



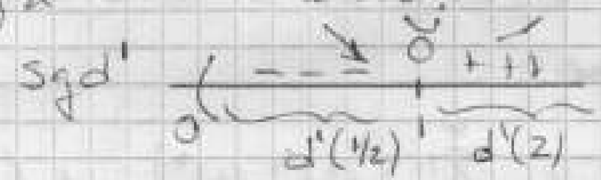

$$d = d(A,B) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \ ; \ x \geq 0$$

$$d'(x) = \frac{2(x-3) + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}$$

$d'(x) = 0 \Rightarrow (x-3) + 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0.$

La única raíz real es $x = 1$. Veamos que $d$ alcanza un mínimo.




$d(1)$ es mínimo. Luego el punto buscado es.

$$\boxed{B = (1, 1).}$$

La afirmación es VERDADERA.

NOTA

2) Sea $g(x) = \begin{cases} a+bx+cx^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x>0. \end{cases}$

a) Para que f sea derivable en $x=0$, por la condición necesaria de derivabilidad, f debe ser continua en $x=0$, o sea, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$:

: $g(0) = a$, por definición de g.

. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

. $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (a+bx+cx^2) = a$

Luego, g es continua en $x=1$ si $a=1$ y $b,c\in\mathbb{R}$.

Para que g sea derivable en $x=1$ debe existir y ser finito el siguiente límite:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x}$$

Entonces:

$$g'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2}}_{= \text{“}0/0\text{”}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{2x}}_{= \text{“}0/0\text{”}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}(x)}{2} = 0$$

$$g'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{1}+bx+cx^2-\cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(b+cx)}{\cancel{x}} = b$$

Con lo cual $g'(0)$ existe si $g'(0^+) = g'(0^-)$, o sea

$b=0$

Luego, g es derivable en $x=0$ si:

$$\boxed{a=1, \quad b=0, \quad c\in\mathbb{R}.}$$

NOTA

b) Para que se cumpla el Teorema de Rolle en $[-1,\pi]$, sólo se debe cumplir que $g(-1)=g(\pi)$, pues por a), $g$ es derivable en $\mathbb{R}$, con lo cual:

i) $g$ continua en $[-1,\pi] \subset \mathbb{R}$

ii) $g$ derivable en $(-1,\pi) \subset \mathbb{R}$.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} g(-1) &= 1+c\cdot 1 = 1+c \\ g(\pi) &= \frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{c=-1}$$

Luego, $g$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en $[-1,\pi]$ si:

$$\boxed{a=1; \quad b=0; \quad c=-1}$$

NOTA

3) $f(x) = \frac{a}{1+x^2} = a(1+x^2)^{-1}$

$f'(x) = -a(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$

$f(1) = \frac{a}{2}$ y $f'(1) = -\frac{a}{2}$. Luego, la recta tangente a $f$ en $(1, f(1))$ es:

$Y - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}(x-1) \Rightarrow Y = -\frac{a}{2}x + a$

Sea $t(x) = -\frac{a}{2}x + a$.

La asíntota de $f$ es $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$, o sea, $Y=0$.

Sea $g(x) = 0$.

Tenemos que la región está limitada por las gráficas de:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \;;\; t(x) = -\frac{a}{2}x + a \;;\; g(x) = 0.$$

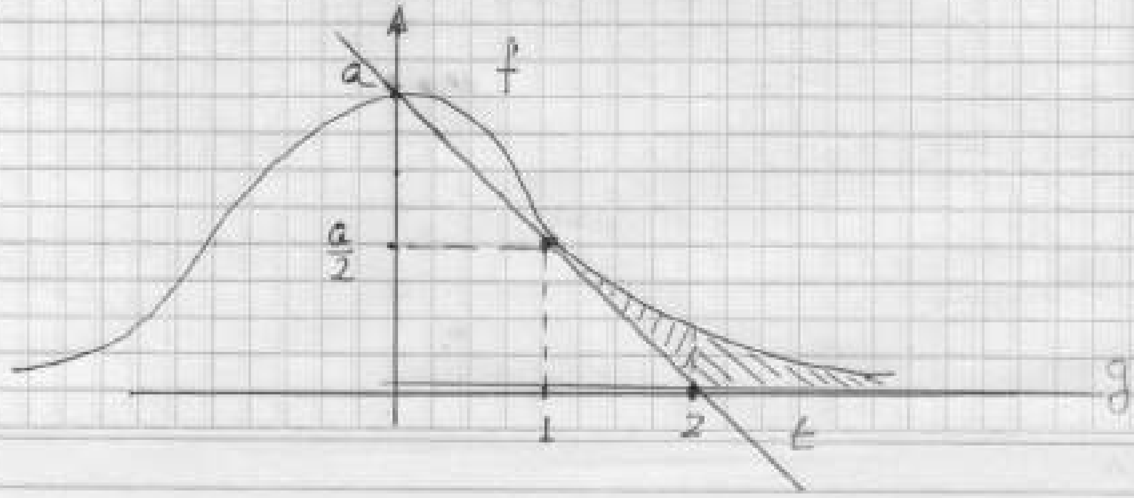
Entonces:

1º) • $f(x) = t(x) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Y = \frac{a}{2}$ $\left(1, \frac{a}{2}\right)$

• $f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{a}{1+x^2} = 0$, abs.

• $t(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{a}{2}x + a = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Y = 0$ $(2, 0)$

2º)



3°) $A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_1^2 \left( \frac{a}{1+x^2} + \frac{a}{2}x - a \right) dx$$

$$A_2 = \int_2^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{a}{1+x^2}\, dx$$

• $\displaystyle\int \left( \frac{a}{1+x^2} + \frac{a}{2}x - a \right) dx = a \cdot \operatorname{arctg}(x) + \frac{a}{4}x^2 - ax + C$

$$A_1 = \left( a \cdot \operatorname{arctg}(x) + \frac{a}{4}x^2 - ax \right)\Big|_1^2 = a \cdot \operatorname{arctg} 2 + a - 2a - \left( a \cdot \operatorname{arctg} 1 + \frac{a}{4} - a \right) =$$

$$= a \cdot \operatorname{arctg} 2 - \cancel{a} - a\frac{\pi}{4} - \frac{a}{4} + \cancel{a} = a \cdot \operatorname{arctg} 2 - \frac{a}{4}\pi - \frac{a}{4}$$

• $\displaystyle\int_2^t \frac{a}{1+x^2}\, dx = a \cdot \operatorname{arctg}(x)\Big|_2^t = a \cdot \operatorname{arctg}(t) - a \cdot \operatorname{arctg} 2$

$$A_2 = \lim_{t \to +\infty} \left( a \cdot \operatorname{arctg}(t) - a \operatorname{arctg} 2 \right) = a\frac{\pi}{2} - a \cdot \operatorname{arctg} 2$$

Luego:

$$A = A_1 + A_2 = a \cdot \cancel{\operatorname{arctg} 2} - \frac{a}{4}\pi - \frac{a}{4} + a\frac{\pi}{2} - a \cdot \cancel{\operatorname{arctg} 2}$$

$$A = -\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\pi$$

Entonces $-\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\pi = \pi - 1 \Rightarrow \frac{a(\pi-1)}{4} = \pi - 1 \Rightarrow a = 4$

Con lo cual: $\boxed{a = 4}$

NOTA

4) Sea $F(x) = \int_{-x}^{0} e^{z} \operatorname{sen}(z)\, dz = \int_{0}^{-x} -e^{z} \operatorname{sen}(z)\, dz$

a) $P_2(x) = F(0) + F'(0)\, x + \frac{F''(0)}{2} x^2$

$F(0) = 0$.

$F'(x) = -e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(-x) \cdot (-1) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(-x)$

$F'(0) = 0$

$F''(x) = -e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(-x) + e^{-x} \cdot \cos(-x) \cdot (-1)$

$F''(0) = -1$

Luego: $\boxed{P_2(x) = -\frac{1}{2} x^2}$

b) $F(-\pi) \cong P_2(-\pi) = -\frac{\pi^2}{2}$, o sea:

$$\boxed{F(-\pi) \cong -\frac{\pi^2}{2}}$$

NOTA: Sin emplear el polinomio de Taylor:

$$\int e^{z} \operatorname{sen}(z)\, dz = \frac{e^{z}(\operatorname{sen}(z) - \cos(z))}{2} + C$$

$$F(-\pi) = \int_{\pi}^{0} e^{z} \operatorname{sen}(z)\, dz = \left. \frac{e^{z}(\operatorname{sen}(z) - \cos(z))}{2} \right|_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{e^{0}(\operatorname{sen} 0 - \cos 0)}{2} - \frac{e^{\pi}(\operatorname{sen}\pi - \cos\pi)}{2} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{e^{\pi}}{2}}$$

El error del cálculo es grande pues -pi se encuentra ¨alejado¨ de x=0

HOJA Nº

FECHA

5) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n+2} (x-a)^{2n}$

a) Si el intervalo de convergencia tiene una longitud de 4 unidades, su radio es 2.

$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \left| \frac{k^{n+1} \cdot (x-a)^{2n+2}}{n+3} \cdot \frac{n+2}{k^n \cdot (x-a)^{2n}} \right| =$$

$$= \left| k \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{n+2}{n+3} \right| = |k| \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{n+2}{n+3}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_{n \to \infty} |k| \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{n+2}{n+3} = |k| \cdot |x-a|^2$$

La serie es abs cv. si $|k| \cdot |x-a|^2 < 1$, o sea:

$$|x-a|^2 < \frac{1}{|k|} \Rightarrow |x-a| < \frac{1}{\sqrt{|k|}}$$

$$R = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|k|}} = 2 \Rightarrow \sqrt{|k|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |k| = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{1}{4} \ \vee \ k = -\frac{1}{4}.}$$

b) Para $k = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} (x-a)^{2n}$

En $x = a+1$ tenemos: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (a+1-a)^{2n}}{n+2} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+2}$ serie alternada.

Verifica las hipótesis del criterio de Leibniz, con lo cual CONVERGE

NOTA