ANÁLISIS MATEMÁTICO I - EXAMEN FINAL - 21/12/22
APELLIDO Y NOMBRE:...
CORRIGIÓ:.......................................REVISÓ:..

Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4	Ejercicio 5	NOTA

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
Condición mínima de aprobación: 50% del examen correctamente resuelto

1- Hallar una solución particular de $xy' = y - \frac{y}{x^2}$ con x>0 e y>0, sabiendo que $y(1) = \sqrt{e}$

2 – Dada la función $f(t) = \begin{cases} t-1 & si\, t < 1 \\ \frac{1}{t+2} & si\, t \geq 1 \end{cases}$,

a) Hallar $F_{(x)} = \int_0^x f(t)\,dt.$
b) Hallar ***a*** de manera que $\int_{-1}^{a} f(t)\,dt = 0$ y calcular el área entre el gráfico de f y el eje de abscisas entre -1 y ***a***.

3 – Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$ converge si a>1 y diverge si 0<a<1

b) El polinomio de Mc Laurin de grado 6 de la función $f(x) = e^x$ permite calcular el valor de **e** con un error de aproximación menor que 10^{-2}.

4 – Un pez que nada contra la corriente en un río gasta cierta energía E al recorrer una distancia d. Si la corriente tiene una rapidez **u** y el pez nada con una rapidez **v** (**v>u**), el tiempo que tarda en recorrer la distancia d es $t = \frac{d}{v-u}$ y la energía que emplea es $E = av^3t$, donde **a** es una constante positiva, determinar con qué rapidez debe nadar el pez para minimizar la energía gastada para cualesquiera que sean los valores de **d**, **u** y **a**.

5 – Dada la función $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3^n}{10^n} - \frac{1}{n(n-1)}\right)(x-1)^n$, hallar f(2), si existe.

1) $xy' = y - \frac{y}{x^2} \Rightarrow x.\frac{dy}{dx} = y - \frac{y}{x^2} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$x\frac{dy}{dx} = y.\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x^2-1}{x^3}\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + \frac{1}{2x^2} + C$

Como $y(1) = \sqrt{e}$, entonces:

$\ln(\sqrt{e}) = \ln 1 + \frac{1}{2} + C \Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1} = \underbrace{\ln 1}_{0} + \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$

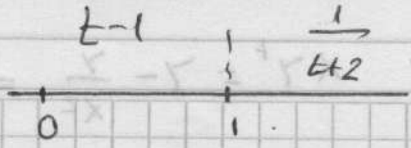
Entonces:

$$\boxed{\ln(y) = \ln(x) + \frac{1}{2x^2}}$$

O bien: $y = e^{\ln(x) + \frac{1}{2x^2}} = e^{\ln(x)}.e^{\frac{1}{2x^2}} = x.e^{\frac{1}{2x^2}}$

$\therefore \boxed{y = x.\,e^{\frac{1}{2x^2}}}$

2) $f(t) = \begin{cases} t-1 & \text{si } t<1 \\ \dfrac{1}{t+2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$



a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int_0^x (t-1)\,dt = \frac{(t-1)^2}{2}\Big|_0^x = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} =$

$= \dfrac{x^2-2x+1}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2-2x}{2}$

En particular, para $x=1$: $F(1) = -1/2$.

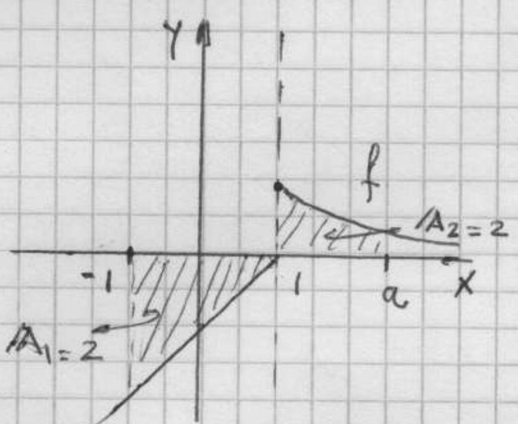
$x>1 \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt =$

$= F(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t+2}\,dt = -\frac{1}{2} + \ln(t+2)\Big|_1^x = -\frac{1}{2} + \ln(x+2) - \ln 3$

Luego:

$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \ln(x+2) - \ln 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^a f(t)\,dt$



$a \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^a (t-1)\,dt = \frac{(t-1)^2}{2}\Big|_{-1}^a =$

$= \dfrac{(a-1)^2}{2} - \dfrac{4}{2} = -2$ para $a=1$.

$\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t+2}\,dt = \ln(t+2)\Big|_1^a = \ln(a+2) - \ln 3 = \ln\left(\frac{a+2}{3}\right)$

$\therefore \displaystyle\int_{-1}^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow -2 + \ln\left(\frac{a+2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{a+2}{3}\right) = 2 \Rightarrow \underline{a = 3e^2 - 2}$

Con lo cual, el área $\boxed{A = 4}$

3)

a) FALSO

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_a^u \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt.$$

$$z = \ln(t) \Rightarrow dz = \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt = \int \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln(t)} + C$$

$$\int_a^u \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt = -\frac{1}{\ln(t)}\Big|_a^u = -\frac{1}{\ln(u)} + \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \Big(\underbrace{-\frac{1}{\ln(u)}}_{\downarrow 0} + \frac{1}{\ln(a)} \Big) = \frac{1}{\ln(a)} \in \mathbb{R}.$$

$a \neq 1.$

b) VERDADERO.

$$f(x) = e^x, \quad P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{e^c}{7!}x^7$$

Para $x = 1$:

$$|R_6(1)| = \frac{e^c}{7!} < \frac{3}{7!} \cong 5{,}9 \cdot 10^{-4} < 10^{-2}$$

4) $t = \dfrac{d}{v-u}$ y $E = a v^3 t$, luego:

$$E = a \cdot v^3 \cdot \frac{d}{v-u} = a \cdot d \cdot \frac{v^3}{v-u} = k \cdot \frac{v^3}{v-u}, \quad k = a \cdot d.$$

$$E'(v) = k \cdot \frac{3v^2(v-u) - v^3 \cdot 1}{(v-u)^2} = \frac{k \cdot (2v^3 - 3v^2 u)}{(v-u)^2}$$

$$E'(v) = 0 \Rightarrow 2v^3 - 3v^2 u = 0 \Rightarrow v^2(2v-3u) = 0 \Rightarrow$$

$v = \frac{3}{2} u.$

$(v \neq 0)$

$\operatorname{Sg} E'(v)$: $- - -$ 0 $+ + +$

$E'(u)$ $\quad \frac{3}{2}u \quad$ $E'(2u)$

La energía es mínima para una velocidad:

$$\boxed{v = \frac{3}{2} u}$$

5) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}{}' \left(\frac{3^n}{10^n} - \frac{1}{n(n-1)} \right) (x-1)^n$.

$f(2) = \sum_{n=2}^{\infty}{}' \left(\frac{3^n}{10^n} - \frac{1}{n(n-1)} \right)$

$\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{3^n}{10^n} = \sum_{n=2}^{\infty}{}' \left(\frac{3}{10}\right)^n$, serie geométrica de razón

$r = \frac{3}{10}$, convergente. Luego:

$\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{3^n}{10^n} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^2}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{7}{10}} = \underline{\frac{9}{70}}$

$\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{1}{n(n-1)}$ $\qquad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} =$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \underline{1}$

Como ambas series convergen, se tiene que:

$f(2) = \sum_{n=2}^{\infty}{}' \left(\frac{3^n}{10^n} - \frac{1}{n(n-1)} \right) = \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{3^n}{10^n} - \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{1}{n(n-1)} =$

$= \frac{9}{70} - 1 = \boxed{-\frac{61}{70}}$