UTN.BA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Examen Final 26/07/2023

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

1		2	3	4		5	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas con los procedimientos analíticos adecuados para ser tenidas en cuenta.

No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas

Condición de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto.

---

1) Analice si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). **Justifique las respuestas**: ya sea mostrando un contraejemplo o proporcionando un argumento basado en las herramientas teóricas que conoce, según corresponda.

a. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos^2(2x)-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$ **NO USAR EL TEOREMA DE BERNOULLI-L´HÔPITAL**

b. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$ es convergente $\forall x \in [-3,1]$

2) Sea f una función que admite función derivada primera continua en todo el eje real y que verifica $\int_1^{e^x} f'(lnt)dt = \frac{x^2}{2} + 4x$ para todo $x \in R$. Determine $f(x)$ tal que $f(0) = -5$. **Justifique claramente el procedimiento empleado**.

3) Sea la función definida por $h(x) = f(senx)$ y $P(x) = 4x - x^2$ el polinomio de Taylor de segundo grado asociado a la función f en el punto $x_0 = 1$. Determine el polinomio de Taylor de 2º grado asociado a la función h en el punto $a = \frac{\pi}{2}$.

4) a) Calcule el área de la región plana D limitada por el gráfico de la función definida por $f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$ y la recta $y = 8$

b) Dibuje la región D.

5) Sea la función definida por $g(x) = x^2.\ln(x)$, determine, analiticamente, si g admite extremos locales, extremos globales y luego indique el conjunto imagen de g. **Justifique todas sus respuestas**.

1) a)

- $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos^2(2x)-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{-4\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} = \underline{\underline{e^{-4}}}$

- $\lim_{x\to 0} (1-4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}\cdot\frac{1}{x}(-4x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \left[(1-4x)^{\frac{1}{-4x}}\right]^{-4} = \underline{\underline{e^{-4}}}$

La afirmación es verdadera.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(x+1)^n}{2^n}} = \frac{|x+1|}{2}$

La serie es abs cv si $\frac{|x+1|}{2} < 1$, o sea, $-3<x<1$

$x=-3$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$, diverge por la condición necesaria de convergencia.

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, diverge por la misma condición. Luego, $I_c = (-3, 1)$

La afirmación es falsa.

2) $\displaystyle\int_1^{e^x} f'(\ln(t))\,dt = \frac{x^2}{2} + 4x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = -5$

$f'(\ln e^x).e^x = x+4 \Rightarrow f'(x).e^x = (x+4) \Rightarrow$

$f'(x) = (x+4).e^{-x} \Rightarrow f(x) = \int (x+4).e^{-x}\,dx$

$\begin{cases} u = x+4 \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$\int (x+4)\,e^{-x}\,dx = -(x+4).e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+4).e^{-x} - e^{-x} + C$

Entonces $f(x) = -(x+4).e^{-x} - e^{-x} + C$

$f(0) = -5 \Rightarrow -4.e^0 - e^0 + C = -5 \Rightarrow \underline{C = 0}$

Luego: $\boxed{f(x) = -(x+4).e^{-x} - e^{-x}}$

---

3) $h(x) = f(\operatorname{sen}(x))$

$h'(x) = f'(\operatorname{sen}(x)).\cos(x)$ y $h''(x) = f''(\operatorname{sen}(x)).\cos^2(x) - f'(\operatorname{sen}(x))\operatorname{sen}(x)$

$P(x) = 4x - x^2 \Rightarrow P'(x) = 4 - 2x$ y $P''(x) = -2$.

$f(1) = P(1) = 3$, $f'(1) = P'(1) = 2$; $f''(1) = P''(1) = -2$.

$Q(x) = h(\pi/2) + h'(\pi/2).(x-\pi/2) + \frac{h''(\pi/2)}{2!}(x-\pi/2)^2$

$h(\pi/2) = f(\operatorname{sen}\pi/2) = f(1) = 3$

$h'(\pi/2) = f'(\operatorname{sen}(\pi/2)).\cos\pi/2 = 0$

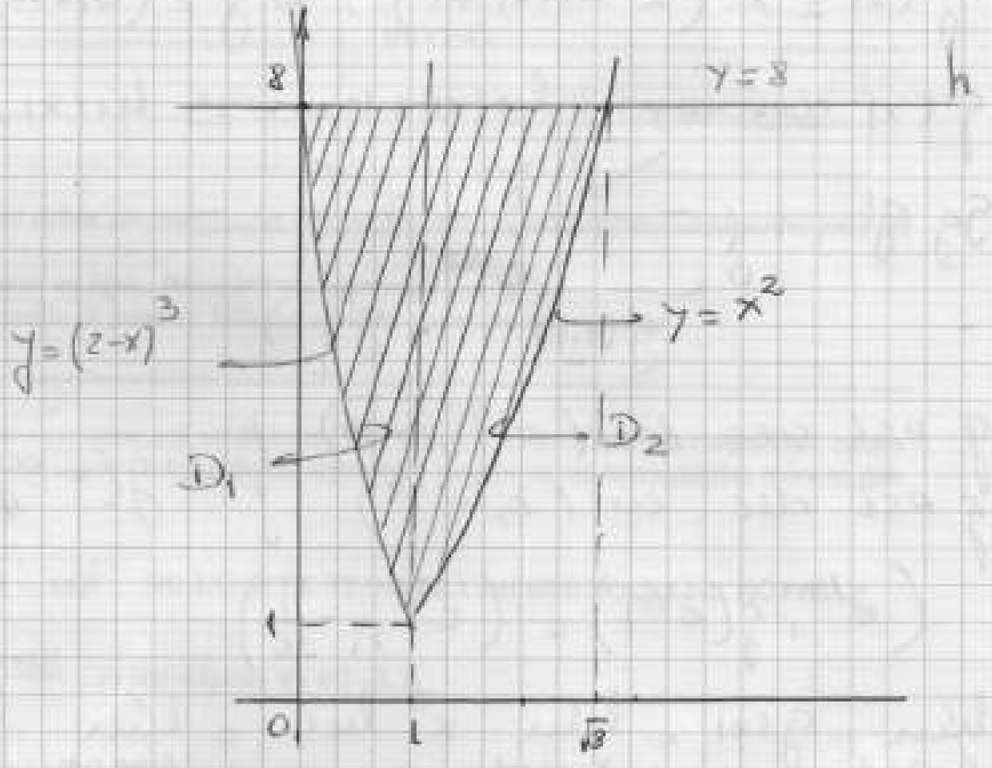
$h''(\pi/2) = f''(\operatorname{sen}\pi/2).\cos^2(\pi/2) - f'(\operatorname{sen}\pi/2).\operatorname{sen}\pi/2 = 0 - 2.1 = -2$

Luego:

$Q(x) = 3 - \frac{2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

O sea $\boxed{Q(x) = 3 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

4) $f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $h(x) = 8$



$D = D_1 + D_2$

$D_1 = \int_0^1 \left(8 - (2-x)^3\right) dx$; $D_2 = \int_1^{\sqrt{8}} \left(8 - x^2\right) dx$.

$D_1 = \left(8x + \frac{(2-x)^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 8 + \frac{1}{4} - (0 + 4) = \frac{17}{4}$

$D_2 = \left(8x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^{\sqrt{8}} = 8\sqrt{8} - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{8})^3 - \left(8 - \frac{1}{3}\right) =$

$= 8\sqrt{8} - \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{8} - \frac{23}{3} = \frac{16}{3}\sqrt{8} - \frac{23}{3}$

Luego: $D = \frac{17}{4} + \frac{23}{3}\sqrt{8} - \frac{23}{3}$

$$\boxed{D = \frac{16}{3}\sqrt{8} - \frac{41}{12}}$$

5) $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, $D_g = (0, +\infty)$

$$g'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = x\,(2\ln(x) + 1)$$

$$g'(x) = x \cdot (2\ln(x) + 1), \quad Dg' = (0, +\infty)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x = e^{-1/2}}$$

Sg g'

$$\begin{array}{ccccccc} (& - & - & - & 0 & + & + \; + \\ 0 & & & & e^{-1/2} & & \end{array}$$

$\underbrace{g'(0,1)}_{-}$ $\qquad \underbrace{g'(1)}_{+}$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ est. crec. en } (e^{-1/2}, +\infty) \\ g \text{ est. dec. en } (0, e^{-1/2}) \end{array}\right\} \Rightarrow g(e^{-1/2}) \text{ mín local.}$$

$$\left(e^{-1/2}, g(e^{-1/2})\right) = \left(e^{-1/2}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2} x^2 = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \ln(x) = +\infty$$

Resulta entonces que $g(e^{-1/2})$ es mín. global. y

$I_g = \left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.