UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Examen Final – 27 de Mayo de 2019

Tema F-06-2019

Apellido y nombres del/la estudiante:...
Especialidad: ……

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	Calificación

***NOTA**: La condición para aprobar el Examen Final es tener <u>bien</u> cinco de las ocho actividades a resolver, debiendo haber al menos una de cada uno de los ítems designados del 1 al 4. Presente en las hojas que entrega el desarrollo completo de todos los ítems, para justificar sus respuestas. <u>No haga el examen con lápiz</u>.*

BLOQUE TEMÁTICO 1: ÁLGEBRA VECTORIAL – ÁLGEBRA MATRICIAL

1.a) Obtener los valores de $h \in R$ para que el vector $\overrightarrow{p}$ tenga norma $\sqrt{8}$ siendo $\overrightarrow{p}$ la proyección vectorial del vector $\vec{u} = (2; h)$ sobre el vector $\vec{v} = (1; 1)$. Luego, considerando uno de los vectores $\vec{u}$, proponer un vector $\overrightarrow{a}$ no nulo tal que el conjunto $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}\}$ sea linealmente dependiente.

1.b) Construya un sistema compatible indeterminado de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas para el cual el conjunto $S = \{k; 1 - k; -k\}$ con $k \in R$ es conjunto solución del mismo. Justifique el procedimiento aplicado.

BLOQUE TEMÁTICO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

Considere el plano α: $4x + y - 2z = 0$ y la recta R: $(x; y; z) = (1; 0; b) + t(-1; a; -1)$ con $t \in R$

2.a) Obtenga, justificando el procedimiento adoptado, el o los valores de los parámetros a y b para que la recta esté contenida en el plano α.

2.b) Encuentre el o los valores de los parámetros a y b para que la distancia de la recta al plano α sea de $2\sqrt{21}$ unidades de longitud. Justifique el procedimiento empleado.

BLOQUE TEMÁTICO 3: ÁLGEBRA LINEAL

3.a) Sea $F: R^3 \to R^2$ una transformación lineal que verifica que $F(1; 1; 1) = (1; 2)$; $F(1; 1; 0) = (0; 1)$ y $F(0; 1; -1) = (0; 0)$. Obtenga la expresión analítica de F y la matriz asociada en las bases canónicas.

3.b) Para la transformación lineal del ejercicio anterior, determine la expresión analítica de $Nu(F)$ y una base. ¿Qué representa geométricamente $Nu(F)$?. ¿Es posible obtenerlo sin necesidad de conocer la fórmula de F? ¿Por qué?

MISCELÁNEAS

4.a) Sea la ecuación $x^2 + my^2 - 4x = 0$.
i) Describa qué lugar geométrico representa en R^2 para los distintos valores reales del parámetro m.
ii) Si $m = -1$ y considera la ecuación en R^3, ¿qué superficie representa?

4.b) Analizar si $W = \{A \in R^{2x2} / \rho(A) = 1\}$ es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2x2.

Resolución

1.a) Obtener los valores de $h \in R$ para que el vector $\vec{p}$ tenga norma $\sqrt{8}$ siendo $\vec{p}$ la proyección vectorial del vector $\vec{u} = (2; h)$ sobre el vector $\vec{v} = (1; 1)$. Luego, considerando uno de los vectores $\vec{u}$, proponer un vector $\vec{a}$ no nulo tal que el conjunto $\{\vec{u}, \vec{a}\}$ sea linealmente dependiente.

1º) hallamos $\vec{\mathbf{p}}$ mediante: $\vec{\mathbf{p}} = \dfrac{\vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}}}{\left\|\vec{\mathbf{v}}\right\|^2} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{2;h \bullet 1;1}}{\left\| \mathbf{1;1} \right\|^2} \cdot \ \mathbf{1;1} \ = \dfrac{\mathbf{2+h}}{\mathbf{2}} \cdot \ \mathbf{1;1} \ \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{p}} = \left(\dfrac{\mathbf{2+h}}{\mathbf{2}}; \dfrac{\mathbf{2+h}}{\mathbf{2}}\right)}$

2º) $\left\|\vec{\mathbf{p}}\right\| = \sqrt{8} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{2} \cdot \left(\dfrac{\mathbf{2+h}}{\mathbf{2}}\right)^2} = \sqrt{8} \Rightarrow \mathbf{2} \cdot \left(\dfrac{\mathbf{2+h}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \mathbf{8} \Rightarrow \mathbf{2} \cdot \dfrac{\mathbf{2+h}^{\ 2}}{\mathbf{4}} = \mathbf{8} \Rightarrow \ \mathbf{2+h}^{\ 2} = \mathbf{16} \Rightarrow$

$\left|\mathbf{2+h}\right| = \sqrt{\mathbf{16}} \Rightarrow \left|\mathbf{2+h}\right| = \mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{2+h} = -\mathbf{4} \vee \mathbf{2+h} = \mathbf{4} \Rightarrow \boxed{\mathbf{h} = \ -\mathbf{6;2}}$

3º) proponemos con $\mathbf{h} = -\mathbf{6} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{u}} = \ \mathbf{2;-6}}$ entonces para que el conjunto $\{\vec{u}, \vec{a}\}$ sea L.D. basta con que el vector $\vec{\mathbf{a}}$ sea paralelo al vector $\vec{\mathbf{u}}$, simplemente proponemos $\vec{\mathbf{a}} = \ \mathbf{1;-3}$

1.b) Construya un sistema compatible indeterminado de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas para el cual el conjunto $S = \{k; 1-k; -k\}$ con $k \in R$ es conjunto solución del mismo. Justifique el procedimiento aplicado.

1º) el conjunto S debe ser solución de las tres ecuaciones del sistema, una de las cuales al menos, debe ser combinación lineal de las otras dos, por ejemplo:

primera ecuación: $\mathbf{x+y+z = k+1-k+ \ -k \ = 1-k} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x+y+z=1-k}}$ **[1]**

segunda ecuación:

$\mathbf{-2x+y-z=-2 \cdot k+1-k- \ -k \ = -2k+1-k+k=-2k+1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{-2x+y-z=1-2k}}$ **[2]**

tercera ecuación bien sencilla: sumamos la primera mas la segunda: $\boxed{\mathbf{-x+2y=2-3k}}$ **[3]**

2º) resolvemos el sistema aplicando G-J:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y+z=1-k} \\ \mathbf{-2x+y-z=1-2k} \\ \mathbf{-x+2y=2-3k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1-k} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1-2k} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2-3k} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1-k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1-2k+2-2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2-3k+1-k} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1-k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{-4k+3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4k+3} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1-k+4k-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4k+3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3k-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4k+3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x-2y=3k-2} \\ \mathbf{3y+z=-4k+3} \end{array}\right. \Rightarrow$$

estas dos ecuaciones verifican la terna solución. El sistema quedó así:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y+z=1-k} \\ \mathbf{-2x+y-z=1-2k} \\ \mathbf{-x+2y=2-3k} \end{array}\right\}$$

Considere el plano $\alpha: 4x + y - 2z = 0$ y la recta $R: (x; y; z) = (1; 0; b) + \ t(-1; a; -1)$ con $t \in R$

2.a) Obtenga, justificando el procedimiento adoptado, el o los valores de los parámetros a y b para que la recta esté contenida en el plano α.

1º) Reemplazamos las coordenadas de la expresión paramétrica cartesiana de la recta en la ecuación del plano:

$$\mathbf{4 \cdot \ 1-t \ + a \cdot t - 2 \cdot \ b-t \ = 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot t + a \cdot t - 2 \cdot b + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow 4 - 2b = \ 2-a \ \cdot t}$$

2º) para que la recta esté contenida en el plano debe cumplirse que $\mathbf{0 \cdot t = 0 \Rightarrow 2 - a = 0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a=2}}$

y $\mathbf{4-2b=0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b=2}}$

2.b) Encuentre el o los valores de los parámetros a y b para que la distancia de la recta al plano α sea de $2\sqrt{21}$ unidades de longitud. Justifique el procedimiento empleado.

1º) planteamos distancia de un punto a un plano, puesto que, cuando hablamos de distancia de una recta a un plano ello significa que la recta es paralela al plano.

2º) la ecuación paramétrica cartesiana de la recta R es: $\mathbf{x=1-t;\ \ y=a\cdot t;\ \ z=b-t}$
en la fórmula de distancia de un punto a un plano, reemplazamos las tres coordenadas:

$$\mathbf{d_{P,\alpha}=\frac{\left|4\cdot\ 1-t\ +a\cdot t-2\cdot\ b-t\ \right|}{\sqrt{4^2+1^2+\ -2\ ^2}}=2\cdot\sqrt{21}\Rightarrow\frac{\left|4-4t+at-2b+2t\right|}{\sqrt{21}}=2\sqrt{21}\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow\left|4-4t+at-2b+2t\right|=2\cdot\ \sqrt{21}\ ^2\Rightarrow\left|4-2b+\ a-2\ \cdot t\right|=42}$$

3º) siendo la recta paralela al plano, para cualquier valor real de t debe cumplirse la igualdad anterior.

Para que eso ocurra: $\mathbf{a-2=0\Rightarrow\boxed{a=2}\Rightarrow\left|4-2b\right|=42\Rightarrow\begin{cases}4-2b=-42\Rightarrow 2b=46\Rightarrow b=23\\4-2b=42\Rightarrow 2b=-38\Rightarrow b=-19\end{cases}}$

Entonces $\mathbf{\boxed{a=2}\ \wedge\ \boxed{b=\ -19;\ 23}}$

4º) comprobamos que hay dos rectas que cumplen con la condición dada:

I) con $\mathbf{a=2\wedge b=-19}$ tenemos $\mathbf{R_1:\ x;y;z\ =\ 1;0;-19\ +t\cdot\ -1;2;1}$

$$\mathbf{d_{recta-plano}=\frac{\left|4\cdot 1+0-2\cdot\ -19\ \right|}{\sqrt{21}}=\frac{\left|42\right|}{\sqrt{21}}=2\sqrt{21}}\quad\text{verificado!}$$

II) con $\mathbf{a=2\wedge b=23}$ tenemos $\mathbf{R_1:\ x;y;z\ =\ 1;0;23\ +t\cdot\ -1;2;1}$

$$\mathbf{d_{recta-plano}=\frac{\left|4\cdot 1+0-2\cdot\ 23\ \right|}{\sqrt{21}}=\frac{\left|-42\right|}{\sqrt{21}}=2\sqrt{21}}\quad\text{verificado!}$$

3.a) Sea $F: R^3 \to R^2$ una transformación lineal que verifica que $F(1;1;1)=(1;2); F(1;1;0)=(0;1)$ y $F(0;1;-1)=(0;0)$. Obtenga la expresión analítica de F y la matriz asociada en las bases canónicas.

1º) comprobamos si $\mathbf{1;1;1\ ,\ \ 1;1;0\ \ \wedge\ \ 0;1;-1}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, con Mathematics:

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\right)=1\neq 0\Rightarrow \text{ existe una única transformación lineal cuya ley de formación hallaremos.}$$

2º) $\mathbf{a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-x+y+z\\b=2x-y-z\\c=-x+y\end{cases}}$

3º) $\mathbf{F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\ -x+y+z\ \cdot F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\ 2x-y-z\ \cdot F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\ -x+y\ \cdot F\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow}$

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{pmatrix}= \;-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\;\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}+\;\mathbf{2x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}\;\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}+\;-\mathbf{x}+\mathbf{y}\;\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\\-\mathbf{2x}+\mathbf{2y}+\mathbf{2z}+\mathbf{2x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Entonces: $\boxed{\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\,/\,\mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\\\mathbf{y}+\mathbf{z}\end{pmatrix}}$

Por último, verificamos la T.L. obtenida:

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}\\\mathbf{1}+\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}\qquad \mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{0}\\\mathbf{1}+\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}+\mathbf{1}-\mathbf{1}\\\mathbf{1}-\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

3.b) Para la transformación lineal del ejercicio anterior, determine la expresión analítica de $Nu(F)$ y una base. ¿Qué representa geométricamente $Nu(F)$?. ¿Es posible obtenerlo sin necesidad de conocer la fórmula de F? ¿Por qué?

1º) para hallar el núcleo resolvemos el S.H.:

$$\begin{cases}-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{0}\\\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{0}\end{cases}\Rightarrow-\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{y}=-\mathbf{z}\Rightarrow\;\mathbf{x;y;z}\;=\;\mathbf{0;-z;z}\;=\mathbf{z}\cdot\;\mathbf{0;-1;1}$$

$\boxed{\mathbf{Nu\;\;F\;\;:\;\;\;x;y;z}\;\in\mathbb{R}^3\;/\;\;\mathbf{x;y;z}\;=\lambda\cdot\;\mathbf{0;-1;1}}$ Geométricamente se trata de una recta que pasa por el origen cuyo vector director es $\vec{\mathbf{d}}=\;\mathbf{0;-1;1}$

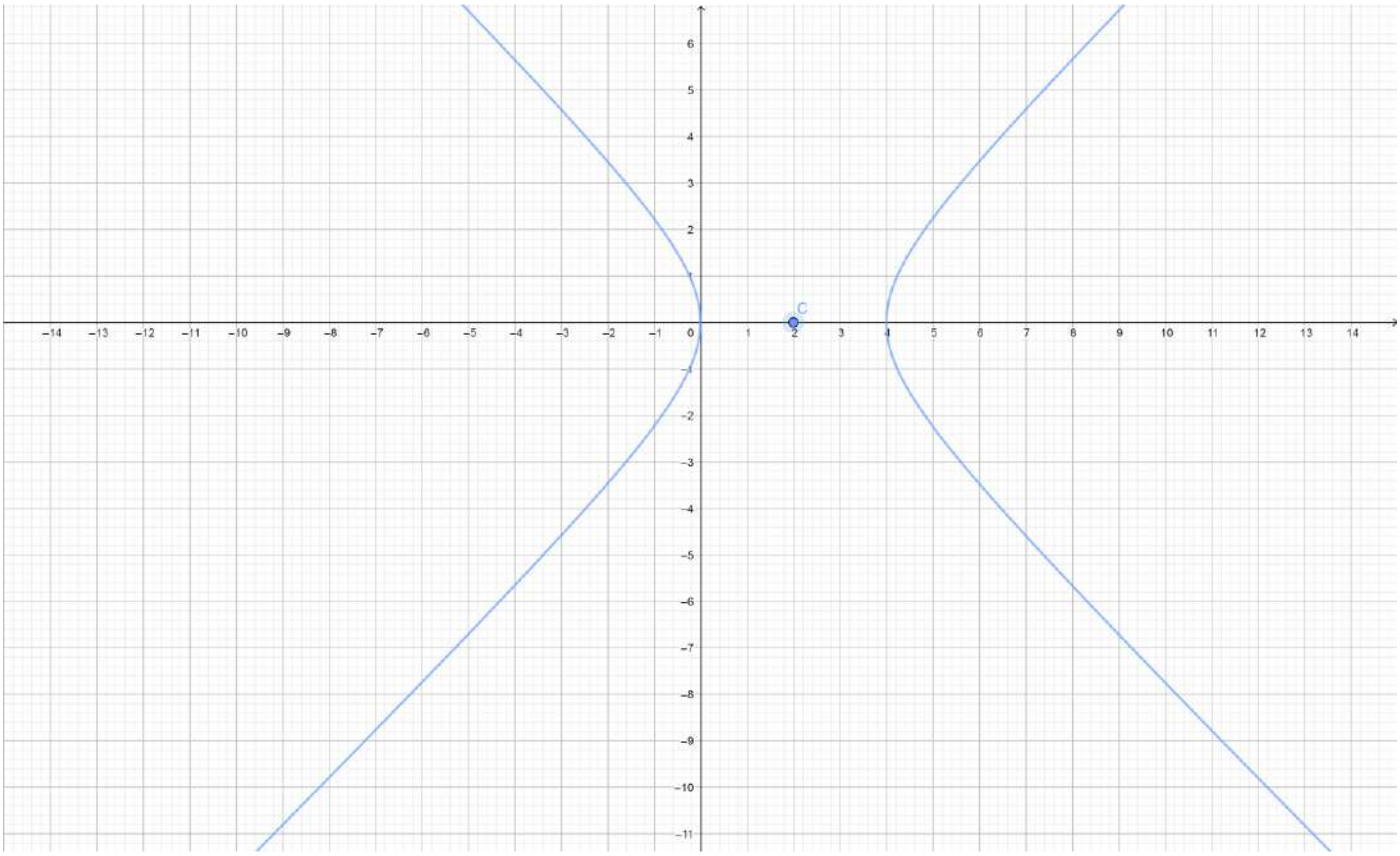
2º) si es posible porque sabemos que $\mathbf{F}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$ lo cual indica que la dimensión del núcleo es 1, geométricamente es una recta cuyo director es el vector $\mathbf{0;1;-1}$ o también paralelo a éste, el $\mathbf{0;-1;1}$.

4.a) Sea la ecuación $x^2 + my^2 - 4x = 0$.
i) Describa qué lugar geométrico representa en R^2 para los distintos valores reales del parámetro m.
ii) Si $m = -1$ y considera la ecuación en R^3, ¿qué superficie representa?

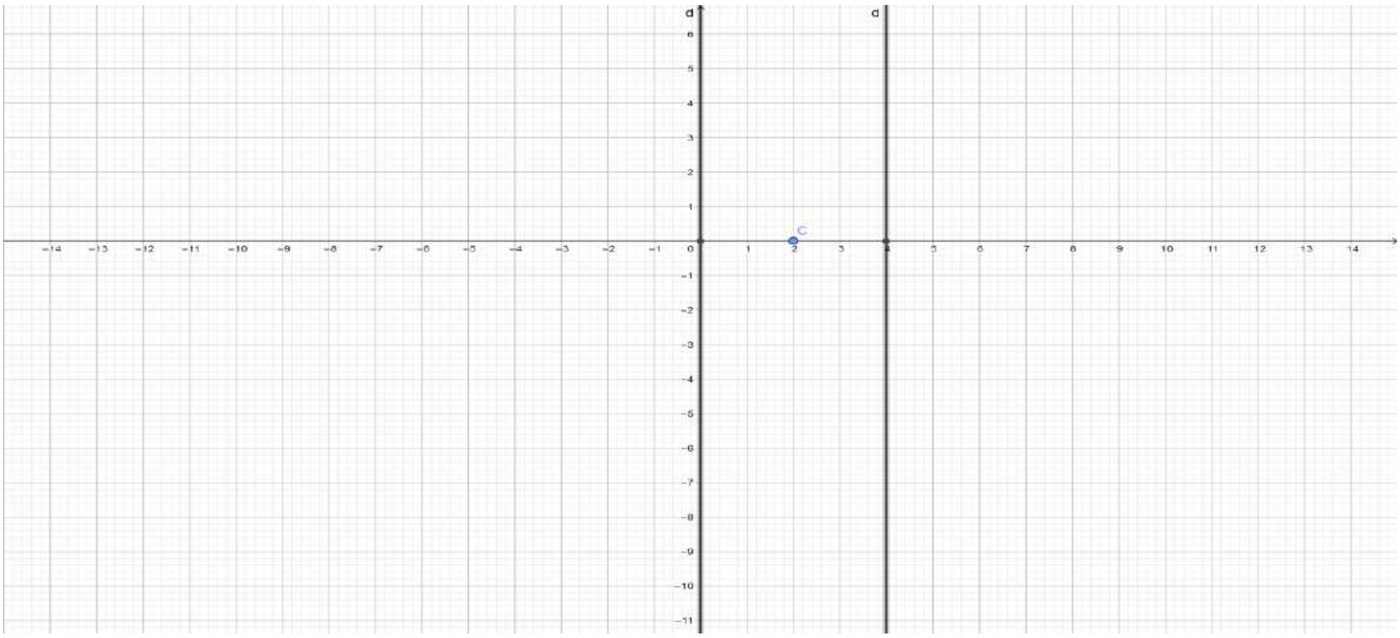
i) 1º) reagrupando términos y completando cuadrados:

$$x^2 - 4x + my^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + my^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + my^2 = 4$$

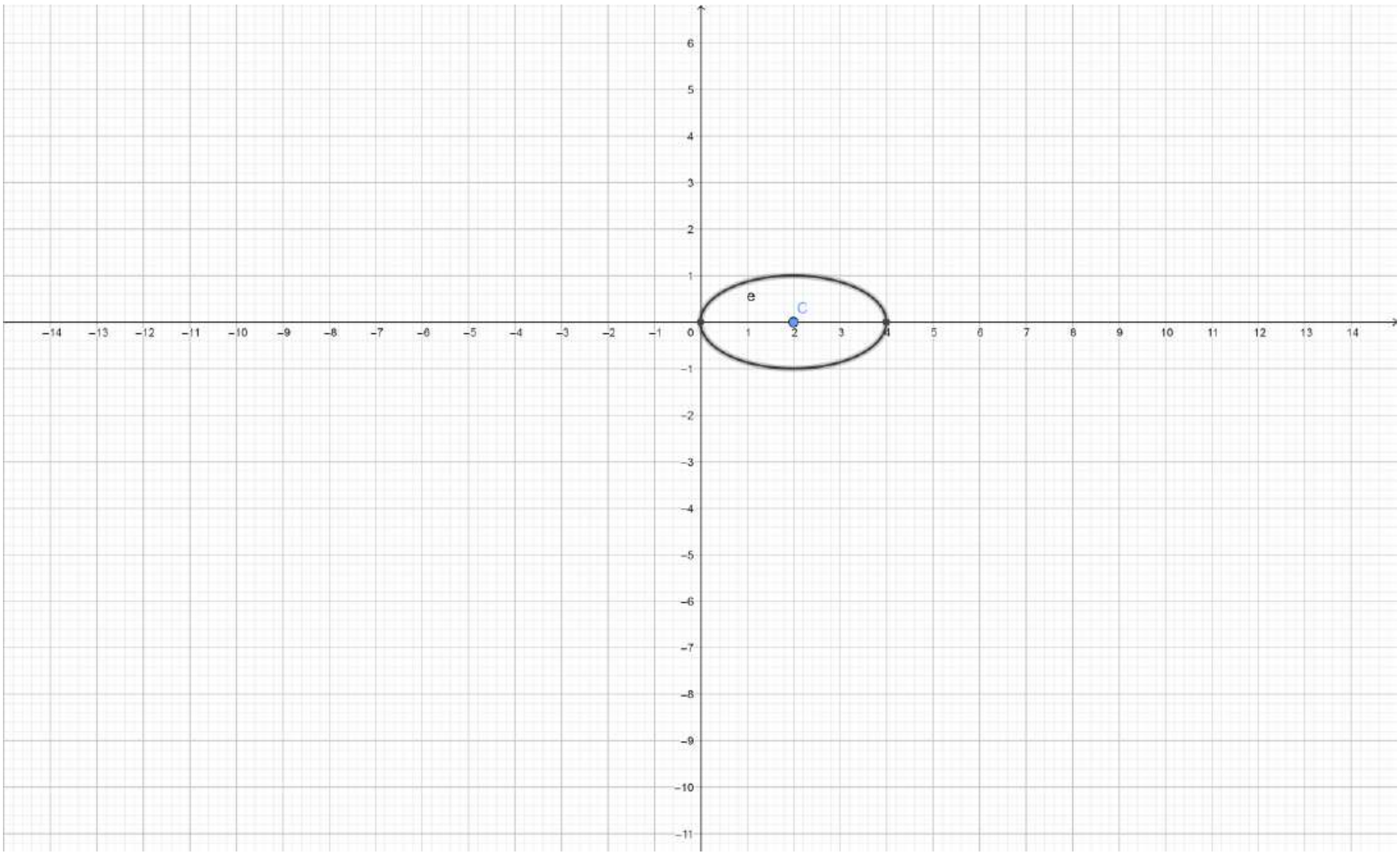
2º) $m < 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{m}} = 1 \Rightarrow$ si $m = -1 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$ hipérbola equilátera:



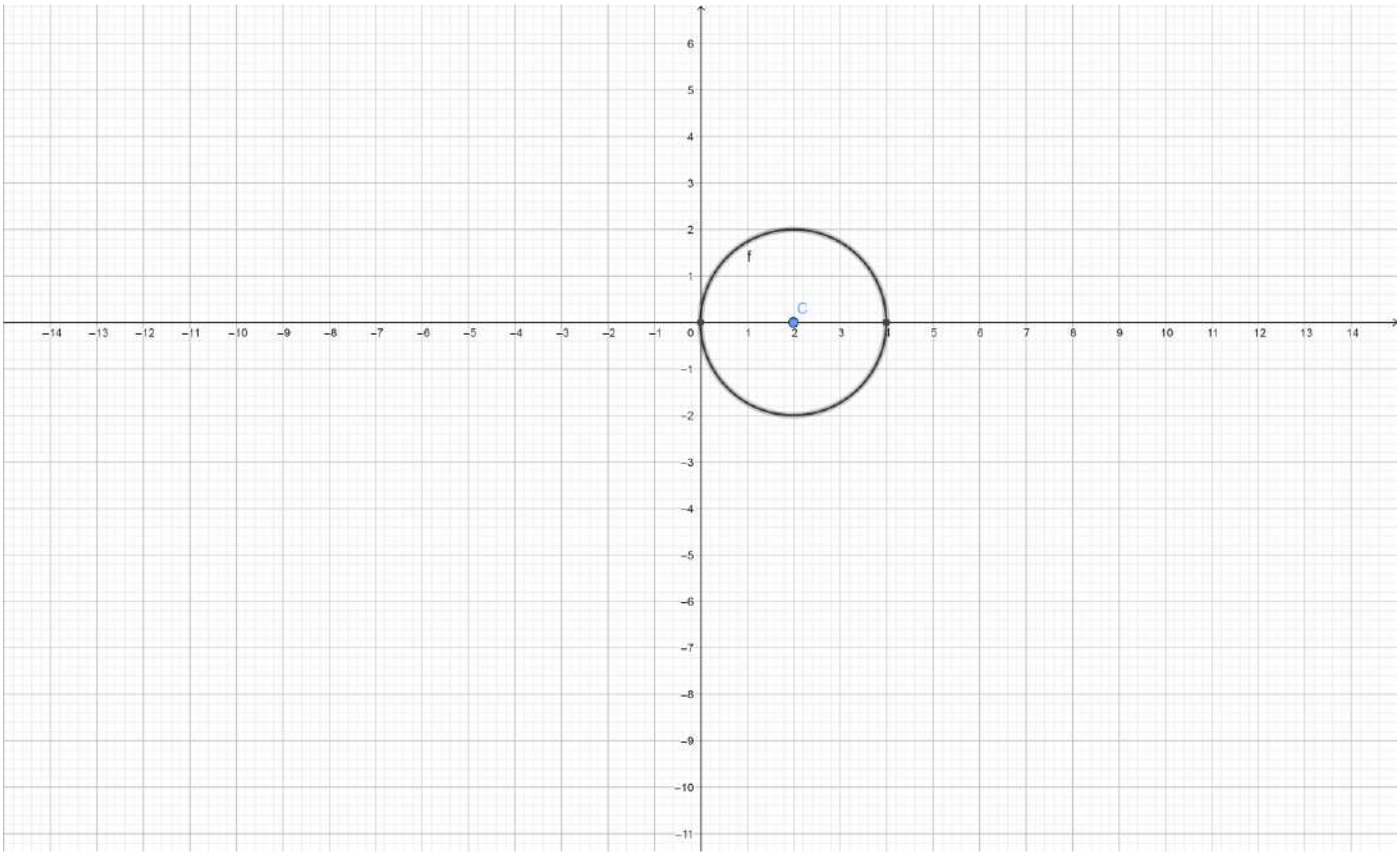
3º) $m = 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 = 4 \Rightarrow |x-2| = 2 \Rightarrow x - 2 = -2 \ \vee \ x - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \{0; 4\}}$



4º) $m>0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{m}}=1 \Rightarrow$ si, por ejemplo $m=4 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow$ es una elipse

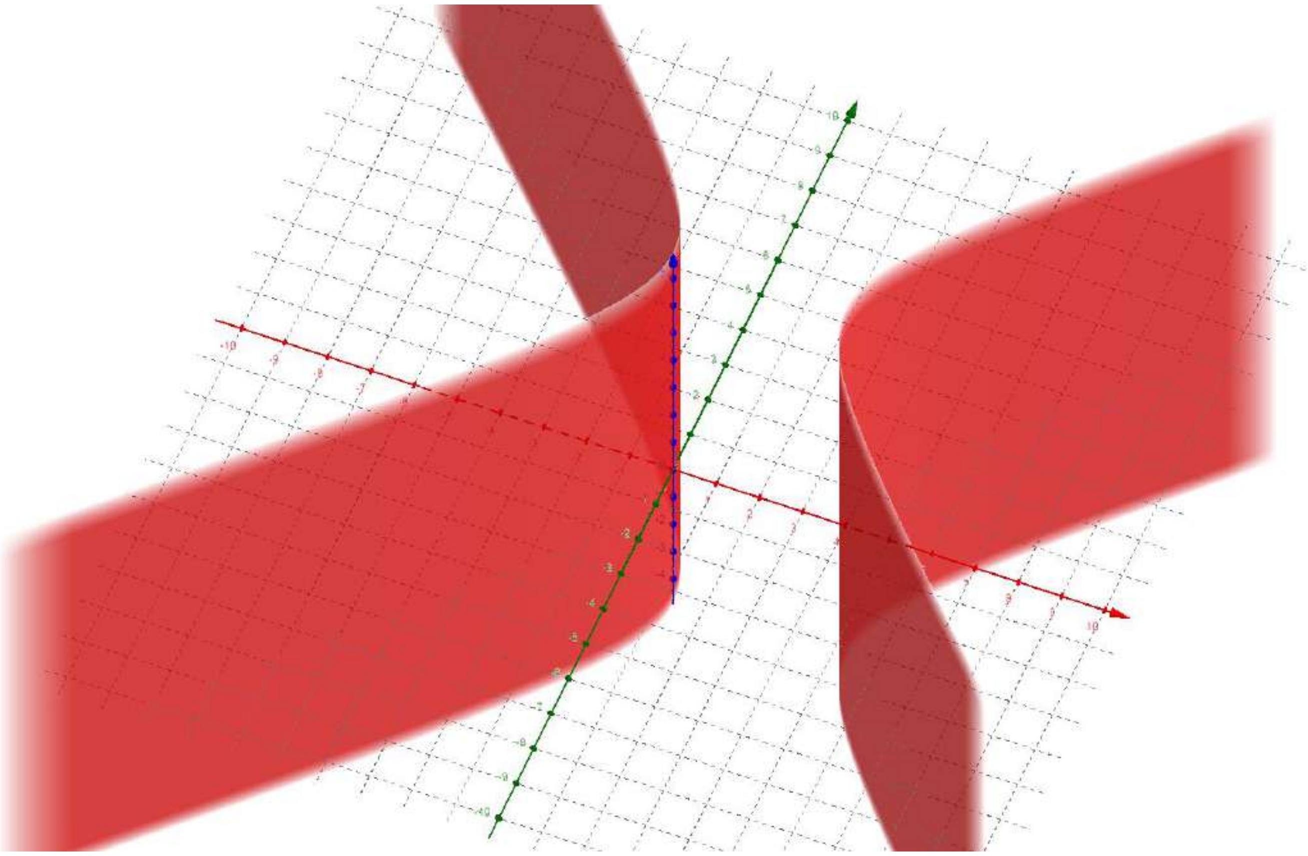


5º) por último, en el caso particular de que siendo $m>0$, sea $m=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2+y^2=4}$



ii) $m=-1 \Rightarrow x^2-y^2-4x=0 \Rightarrow x^2-4x+4-4-y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2-y^2=4 \Rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1}$

se trata de un cilindro hiperbólico recto, el eje de cotas es el de simetría:



4.b) Analizar si $W=\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}/\rho(A)=1\}$ es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2x2.

1º) si $\rho(A)=1$ entonces en $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se cumple que $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} / k \in \mathbb{R}-\{0\}$ o bien $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

2º) considerando $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} / k \in \mathbb{R}-\{0\}$ tenemos: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A=\begin{pmatrix} a_{11} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & k\cdot a_{21} \end{pmatrix}$

3º) para $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

4º) siendo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A=\begin{pmatrix} a_{11} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & k\cdot a_{21} \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 2} / B=\begin{pmatrix} b_{11} & k\cdot b_{11} \\ b_{21} & k\cdot b_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B) \in W$ porque

$(A+B) \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & k\cdot a_{11}+k\cdot b_{11} \\ a_{21}+b_{21} & k\cdot a_{21}+k\cdot b_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & k\cdot(a_{11}+b_{11}) \\ a_{21}+b_{21} & k\cdot(a_{21}+b_{21}) \end{pmatrix}$

se cumple la ley de composición interna.

5º) si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A=\begin{pmatrix} a_{11} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & k\cdot a_{21} \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\alpha\cdot A$

se cumple la ley de composición externa.

<u>Conclusión:</u> $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} / \rho(A)=1$ es un S.E.V. de las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.