UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Examen Final del 31 de Julio de 2019

Tema F-07-19

Apellido y nombres del/la estudiante: ....
Especialidad: ....

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	Calificación

***NOTA**: La condición para aprobar el Examen Final es tener bien cinco de las ocho actividades a resolver, debiendo haber al menos una de cada uno de los ítems designados del 1 al 4. Presente en las hojas que entrega el desarrollo completo de todos los ítems, para justificar sus respuestas. No haga el examen con lápiz.*

BLOQUE TEMÁTICO 1: ÁLGEBRA VECTORIAL – ÁLGEBRA MATRICIAL

1.a) Sean los vectores $\vec{a} = (1; 1; -1)$ y $\vec{b} = (2; 1; m)$. Obtenga $m \in R$ para que $\vec{a} \times \vec{b} = (5; -6; -1)$. Para dicho valor de m, determine la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre la dirección de $\vec{a}$. Justifique, que el vector así obtenido es perpendicular al vector $\vec{a} \times \vec{b}$

1.b) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + ay = a \\ 2x - y = a + 2 \end{cases}$

Estudie, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, qué valor o valores de $a \in R$ producen un sistema de ecuaciones lineales: i) incompatible ii) compatible indeterminado

---

BLOQUE TEMÁTICO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.a) Halle una ecuación implícita de un plano β paralelo al plano $\alpha: 3x + 2y - 6z + 4 = 0$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea de 4 unidades. Luego, explique cómo obtener una ecuación de una recta r tal que $r \subset \beta$. Encuéntrela.

2.b) Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el punto $C(-1; -1)$ y excentricidad $e = \frac{2}{3}$ si, además, el punto $A(5; -1)$ es un extremo del eje mayor; y realice un gráfico aproximado de la cónica. Luego, construya una parábola que tenga como vértice uno de los focos de la elipse, concavidad positiva y cuyo eje de simetría coincida con el eje focal de la elipse. ¿Hay una solución única? ¿Por qué?

BLOQUE TEMÁTICO 3: ÁLGEBRA LINEAL

3.a) Sea la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ tal que: $T(\breve{\imath}) = (0; 1)$, $T(\breve{\jmath}) = (-1; 1)$, $T(\breve{k} - \breve{\jmath}) = (0; 0)$. Encuentre una expresión analítica de T. Analice, justificando, si T es un isomorfismo (TL biyectiva).

3.b) Sea el plano $\pi: x - y + z = 0$. Proponga:
(i) Un subespacio vectorial S que geométricamente sea una recta r perpendicular al plano dado.
(ii) Un subespacio vectorial W que geométricamente sea una una recta t perpendicular r.
Luego, obtenga $S + W$, una base y su dimensión, y justifique si la suma es directa.

MISCELÁNEAS

4.a) Obtenga el valor $t \in R$ para que $\lambda = 5$ sea un autovalor de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ t & -3 \end{pmatrix}$. Luego, determine el segundo autovalor. Cada autovalor de A genera un subespacio vectorial que, geométricamente, es una recta en el plano. Muestre que la medida del menor ángulo entre las rectas es aproximadamente 34°

4.b) Sea la superficie esférica $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 16$. Proponga un plano que al interceptar con dicha superficie dé una circunferencia, y determine el centro y el radio de la misma. Justifique por qué obtiene esa curva con la intersección que propicia.

Resolución

1.a) Sean los vectores $\vec{a}=(1;1;-1)$ y $\vec{b}=(2;1;m)$. Obtenga $m\in R$ para que $\vec{a}\times\vec{b}=(5;-6;-1)$. Para dicho valor de m, determine la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre la dirección de $\vec{a}$. Justifique, que el vector así obtenido es perpendicular al vector $\vec{a}\times\vec{b}$

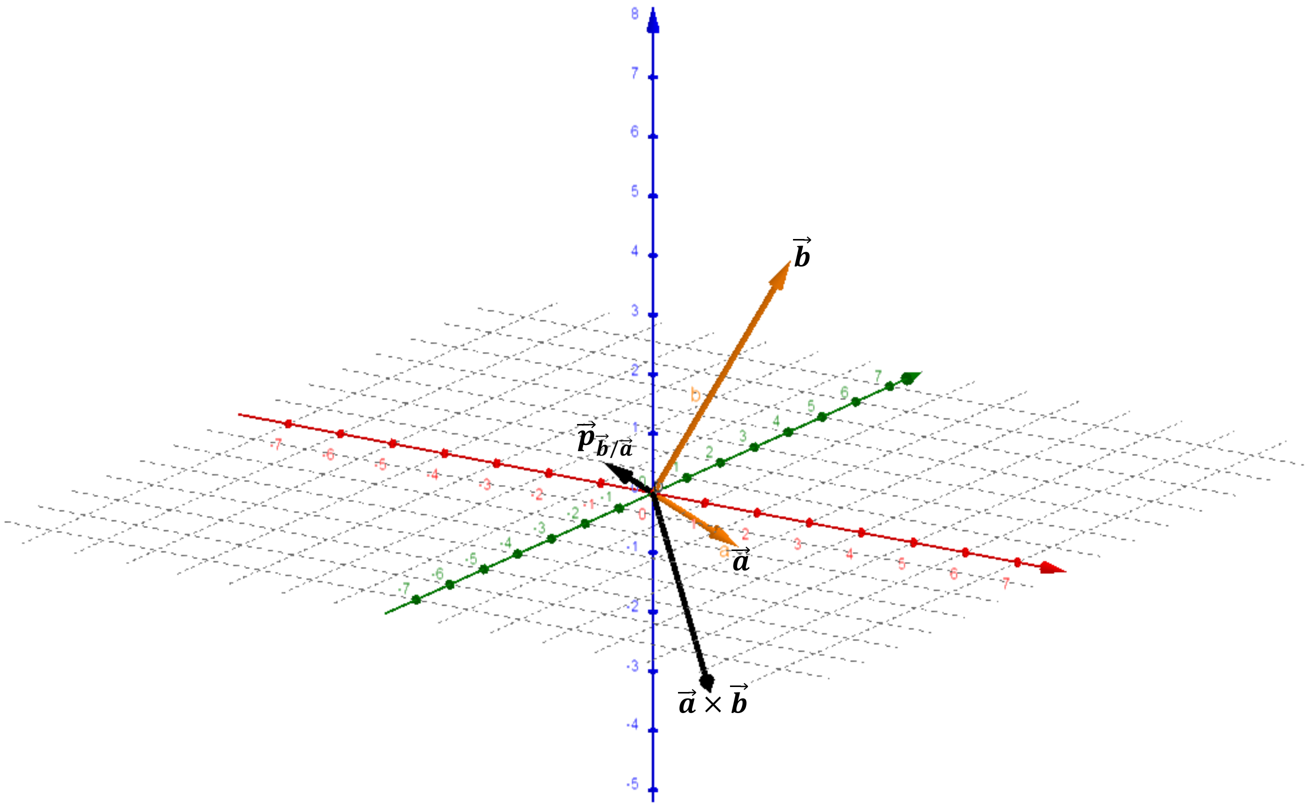
1º) $(1;1;-1)\times(2;1;m)=(m+1;-m-2;-1)$

2º) $(m+1;-m-2;-1)=(5;-6;-1)\Rightarrow\begin{cases} m+1=5\Rightarrow m=4\\ -m-2=-6\Rightarrow m=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{m=4}$

3º) $\vec{p}_{\vec{b}/\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a}=\dfrac{(1;1;-1)\bullet(2;1;4)}{\sqrt{3}}\cdot(1;1;-1)=\dfrac{2+1-4}{\sqrt{3}}(1;1;-1)=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}(1;1;-1)\Rightarrow\boxed{\vec{p}_{\vec{b}/\vec{a}}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

4º) $\vec{p}_{\vec{b}/\vec{a}}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\bullet(5;-6;-1)=-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$

5º) GeoGebra presenta estos vectores en $\mathbb{R}^3$:



1.b) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + ay = a \\ 2x - y = a + 2 \end{cases}$

Estudie, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, qué valor o valores de $a \in R$ producen un sistema de ecuaciones lineales: i) incompatible ii) compatible indeterminado

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a \\ 2 & -1 & a+2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a \\ 0 & -1-2a & -a+2 \end{array}\right) \Rightarrow$ I) si $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S.I.$ II) $\nexists a \in \mathbb{R}$ / sea un $S.C.I.$

2.a) Halle una ecuación implícita de un plano β paralelo al plano $\alpha: 3x + 2y - 6z + 4 = 0$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea de 4 unidades. Luego, explique cómo obtener una ecuación de una recta r tal que $r \subset \beta$. Encuéntrela.

1º) $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \beta: 3x + 2y - 6z + d = 0$ / siendo 4 unidades su distancia al origen planteamos:

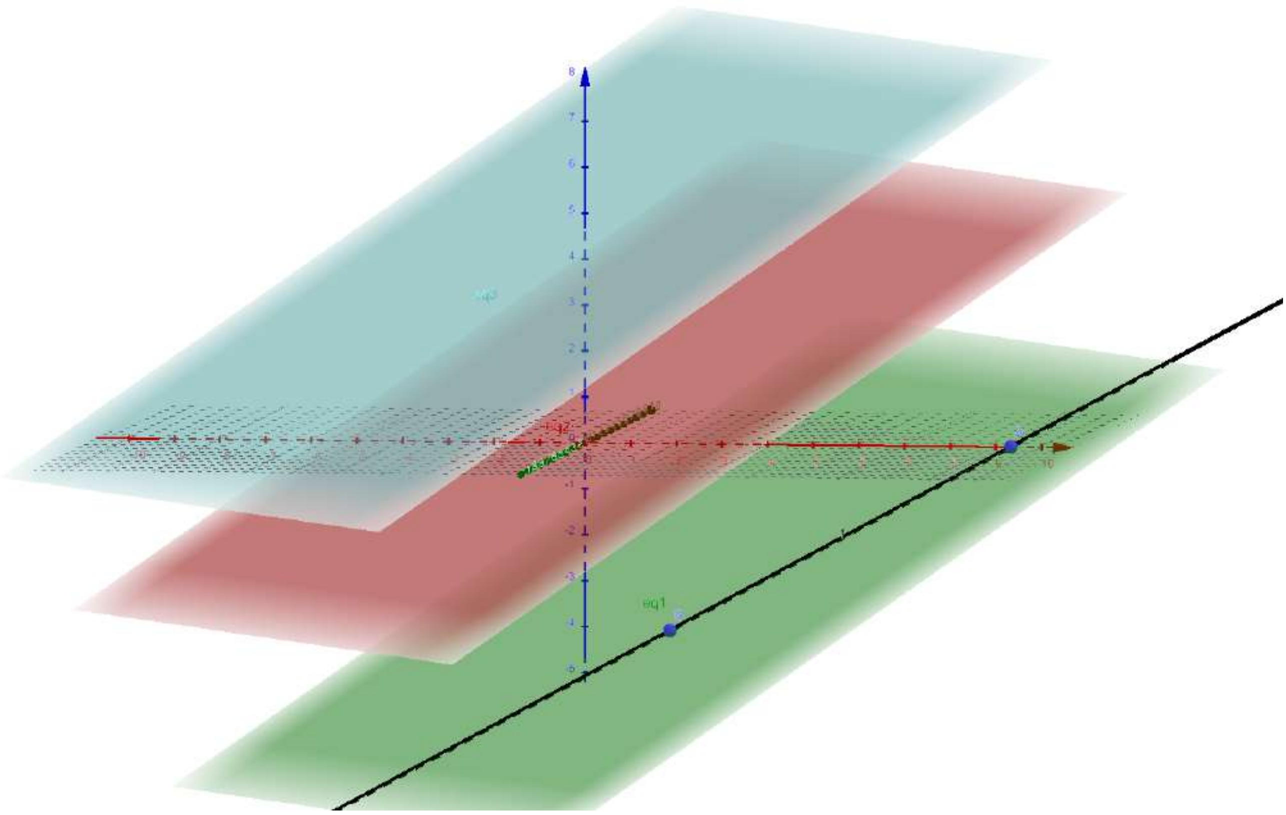
$$dist = \frac{|3x+2y-6z+d|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}} \Rightarrow \frac{|3\cdot 0+2\cdot 0-6\cdot 0+d|}{\sqrt{9+4+36}} = 4 \Rightarrow \frac{|d|}{7} = 4 \Rightarrow d = \{-28; 28\} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\beta_1 : 3x+2y-6z-28=0} \\ \boxed{\beta_2 : 3x+2y-6z+28=0} \end{cases}$$

2º) supongamos $r \subset \beta_1 \Rightarrow$ un camino simple consiste en encontrar dos puntos del plano, por ejemplo:

$A(0;14;0) \in \beta_1$ y $B(2;-1;-4) \in \beta_1 \Rightarrow \vec{d}_r = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2;-1;-4) - (0;14;0) \Rightarrow \vec{d}_r = (2;-15;-4)$

3º) finalmente: $\boxed{r : (x;y;z) = (0;14;0) + \lambda \cdot (2;-15;-4)}$

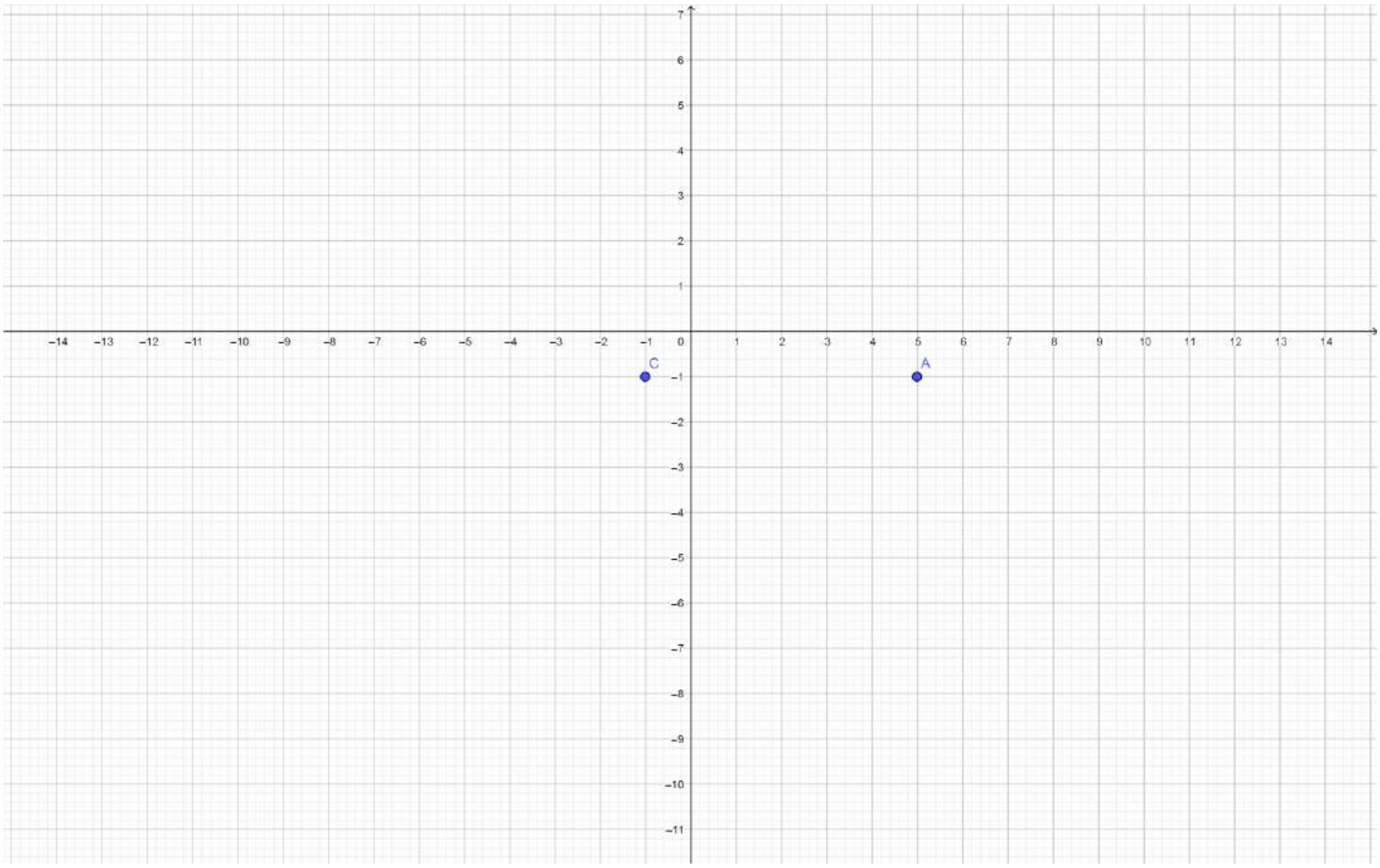
4º) en GeoGebra:



2.b) Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el punto $C(-1;-1)$ y excentricidad $e=\frac{2}{3}$ si, además, el punto $A(5;-1)$ es un extremo del eje mayor; y realice un gráfico aproximado de la cónica. Luego, construya una parábola que tenga como vértice uno de los focos de la elipse, concavidad positiva y cuyo eje de simetría coincida con el eje focal de la elipse. ¿Hay una solución única? ¿Por qué?

1º) $\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ determinamos a y b .

2º) en GeoGebra:



3º) si el punto $A(5;-1)$ pertenece al eje mayor entonces:

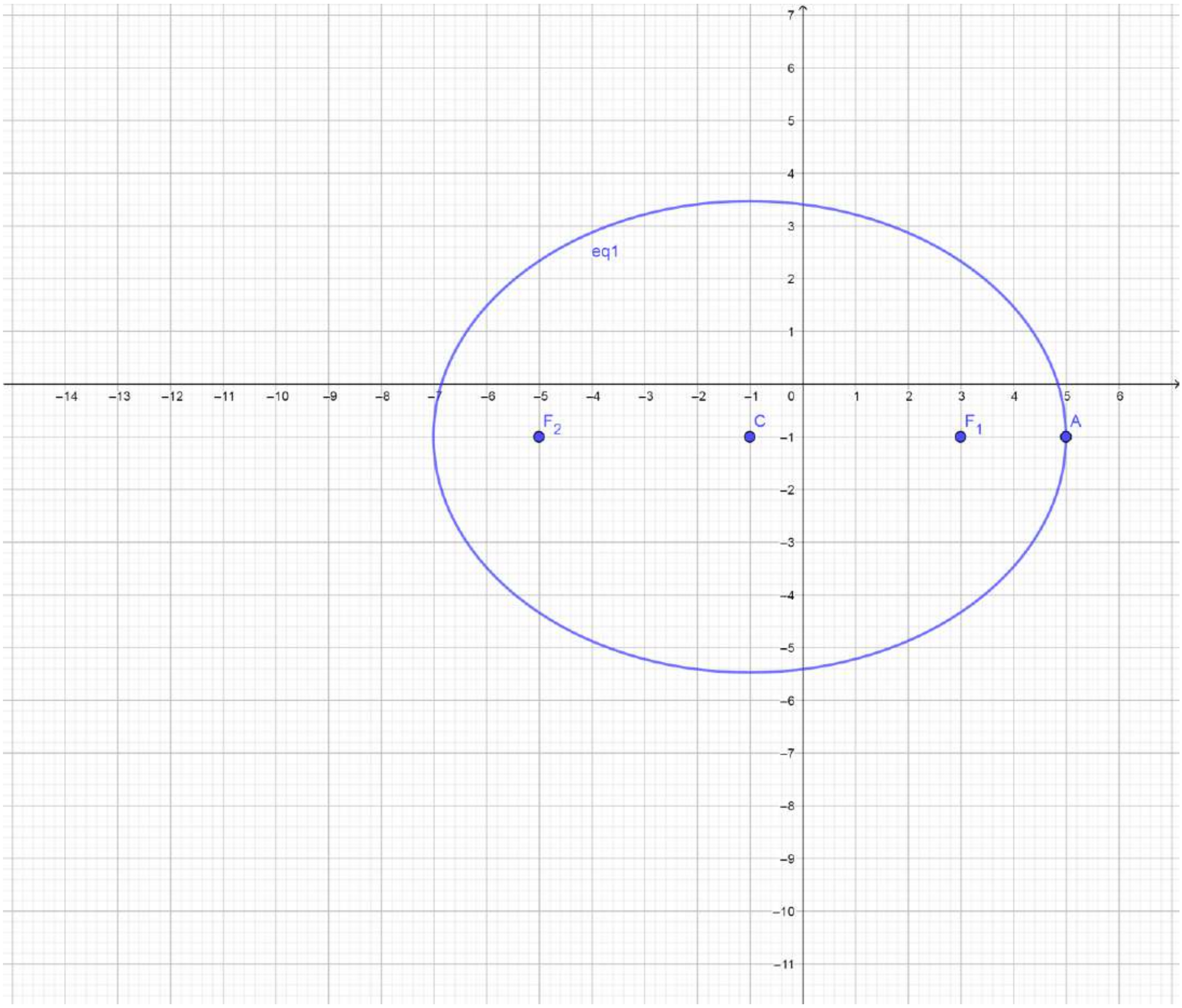
$$a=x_A-x_C=5-(-1)\Rightarrow \boxed{a=6}\Rightarrow e=\frac{c}{a}\Rightarrow c=e\cdot a=\frac{2}{3}\cdot 6\Rightarrow \boxed{c=4}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=36-16\Rightarrow$$

$$b=\sqrt{20}\Rightarrow \boxed{b=2\sqrt{5}}$$

$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1\Rightarrow$ queda: $\boxed{\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1}\Rightarrow$

4º) hallamos los focos de la elipse: $F_1(x_C+c;-1)\wedge F_2(x_C-c;-1)\Rightarrow F_1(-1+4;-1)\wedge F_2(-1-4;-1)$

$\boxed{F_1(3;-1)}\wedge\boxed{F_2(-5;-1)}$

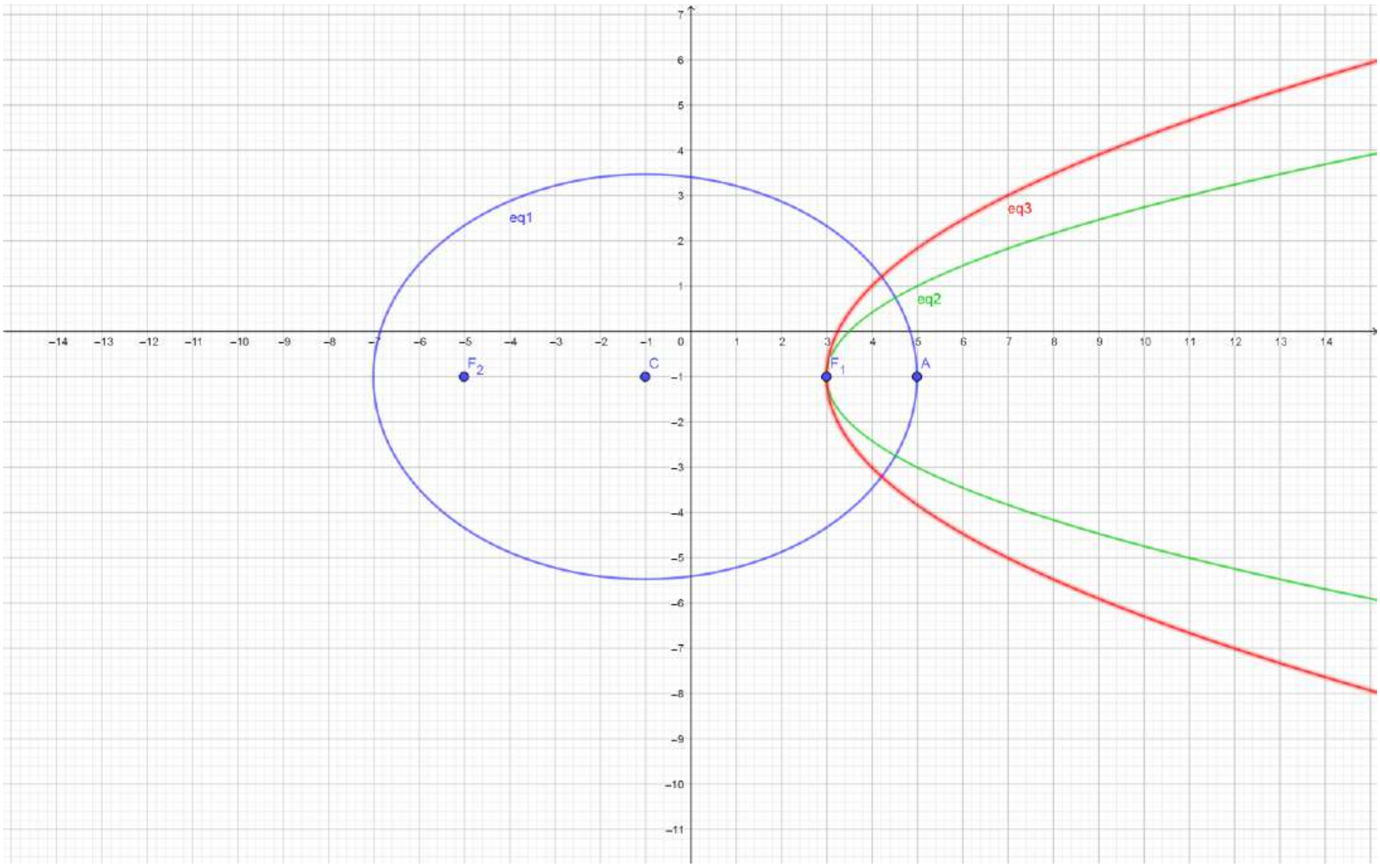


5º) elegimos como vértice de la parábola $F_1(3;-1)$; el eje de simetría de la parábola coincide con el eje focal de la elipse por tanto sus ramas están orientadas hacia la derecha. Hay infinitas soluciones puesto que basta con dar dos valores distintos al parámetro 2*p* en $(y-y_0)^2=+2p\cdot(x-x_0)\Rightarrow\boxed{(y+1)^2=+2p\cdot(x-3)}$ / $p\in(0;+\infty)$

con dos valores positivos de *p* por ejemplo $p=1\wedge p=2$ obtenemos:

$(y+1)^2=+2\cdot(x-3)\wedge(y+1)^2=+4\cdot(x-3)$

y presentamos las tres cónicas en GeoGebra:



3.a) Sea la transformación lineal T: $R^3 \to R^2$ tal que: $T(\breve{\imath}) = (0;1)$, $T(\breve{\jmath}) = (-1;1)$, $T(\breve{k} - \breve{\jmath}) = (0;0)$. Encuentre una expresión analítica de T. Analice, justificando, si T es un isomorfismo (TL biyectiva).

1º) $(\breve{k} - \breve{\jmath}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2º) $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ resolvemos mediante Mathematics para hallar x, y, z en función de *a, b* y *c* .

$$\begin{cases} a = x \\ b = y + z \\ c = -z \end{cases} \Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x \cdot T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (y+z) \cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - z \cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (y+z) \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y-z\\x+y+z\end{pmatrix}}$$

3º) resolvemos $\begin{cases} -y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -y \Rightarrow x + y - y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x;y;z) = (0;y;-y)$

El núcleo de *T* es una recta cuya ecuación es: $(x;y;z) = \lambda \cdot (0;1;-1) \Rightarrow \dim[Nu(T)] = 1 \neq 0 \Rightarrow$

T **<u>no</u>** es un **<u>monomorfismo</u>**

4º) $\dim[Dom(T)] = \dim[Nu(T)] + \dim[im(T)] \Rightarrow 3 = 1 + \dim[im(T)] \Rightarrow \boxed{\dim[im(T)] = 2} \Rightarrow$

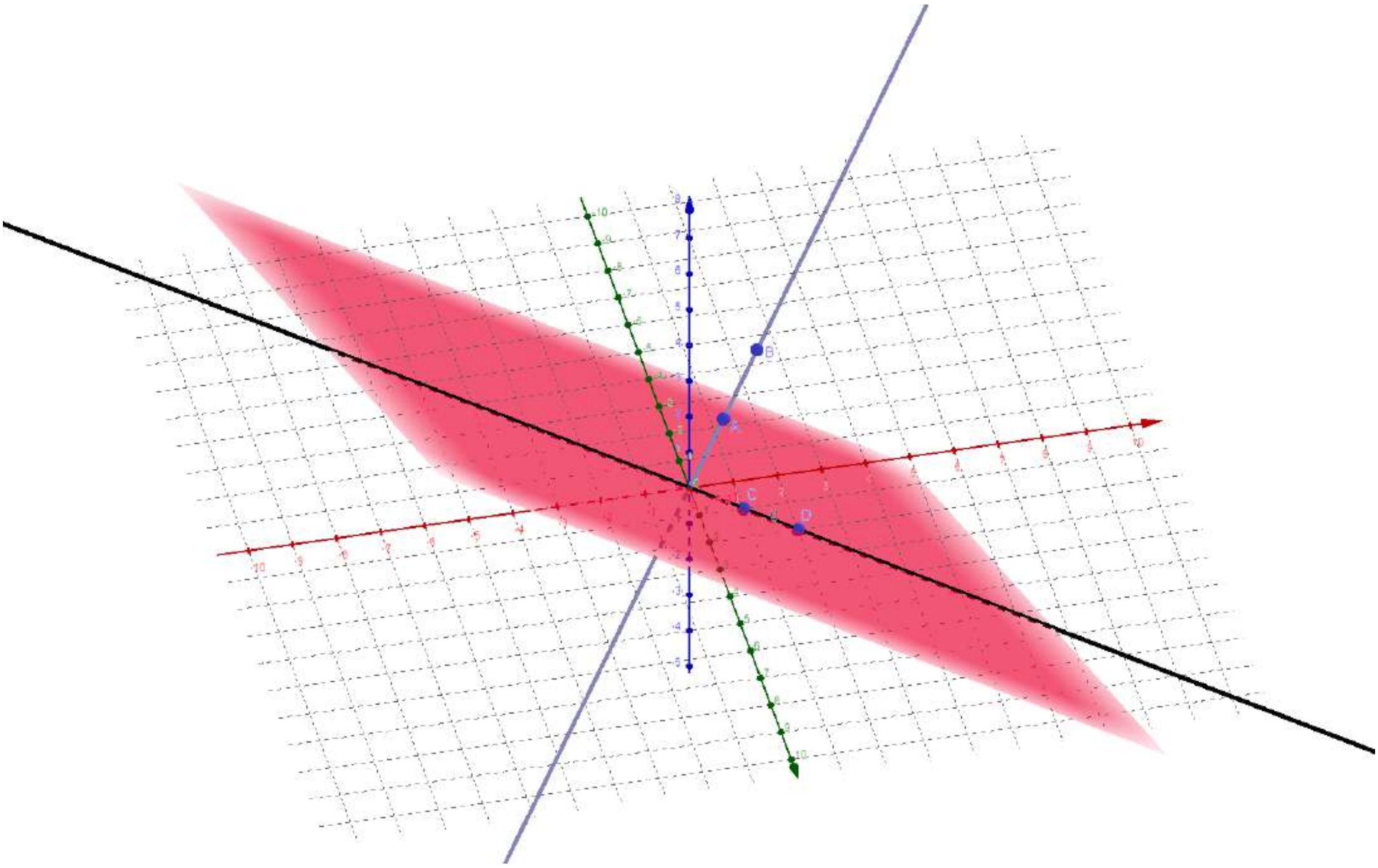
$im(T) \subseteq codom(T) \Rightarrow$ *T* es **<u>epimorfismo.</u>**

5º) Como T no es monomorfismo, entones **<u>no</u>** es **<u>isomorfismo.</u>**

3.b) Sea el plano $\pi: x - y + z = 0$. Proponga:
(i) Un subespacio vectorial S que geométricamente sea una recta r perpendicular al plano dado.
(ii) Un subespacio vectorial W que geométricamente sea una una recta t perpendicular r.
Luego, obtenga $S + W$, una base y su dimensión, y justifique si la suma es directa.

1º) siendo $S^{\perp}: x - y + z = 0 \Rightarrow \boxed{S \Rightarrow r:(x;y;z) = \lambda \cdot (1;-1;1)}$ lo mas simple es tomar el normal del plano como director de la recta; cada uno de ellos es el complemento ortogonal del otro.

2º) basta encontrar una recta perpendicular a r que pase por el origen; su director debe ser perpendicular a $\vec{d}_r = (1;-1;1)$ por ejemplo $\vec{d}_t = (1;1;0) \Rightarrow \boxed{t:(x;y;z) = \mu \cdot (1;1;0)}$ y GeoGebra nos muestra los tres SEV:



3º) $S: r \Rightarrow \dim(S) = 1$ $\quad W: t \Rightarrow \dim(W) = 1$ ambas rectas se interceptan en el origen:
$\Rightarrow S \cap W = \varnothing \Rightarrow \dim(S \cap W) = 0 \Rightarrow \exists\, S \oplus W$ y $\dim(S+W) = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W) \Rightarrow$
$\dim(S+W) = 1 + 1 - 0 \Rightarrow \boxed{\dim(S+W) = 2} \Rightarrow \boxed{S + W = \mathbb{R}^2}$ y la base mas sencilla de $S+W$ es la canónica.

4.a) Obtenga el valor $t \in R$ para que $\lambda = 5$ sea un autovalor de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ t & -3 \end{pmatrix}$. Luego, determine el segundo autovalor. Cada autovalor de A genera un subespacio vectorial que, geométricamente, es una recta en el plano. Muestre que la medida del menor ángulo entre las rectas es aproximadamente 34°

1º) $\left| \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ t & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ t & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 + t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -16} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -16 & -3 \end{pmatrix}$

2º) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -16 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3-\lambda)(3+\lambda) - 16 = 0 \Rightarrow -9 + \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda_1 = 5 \wedge \boxed{\lambda_2 = -5}$

3º) hallamos los correspondientes autovectores:

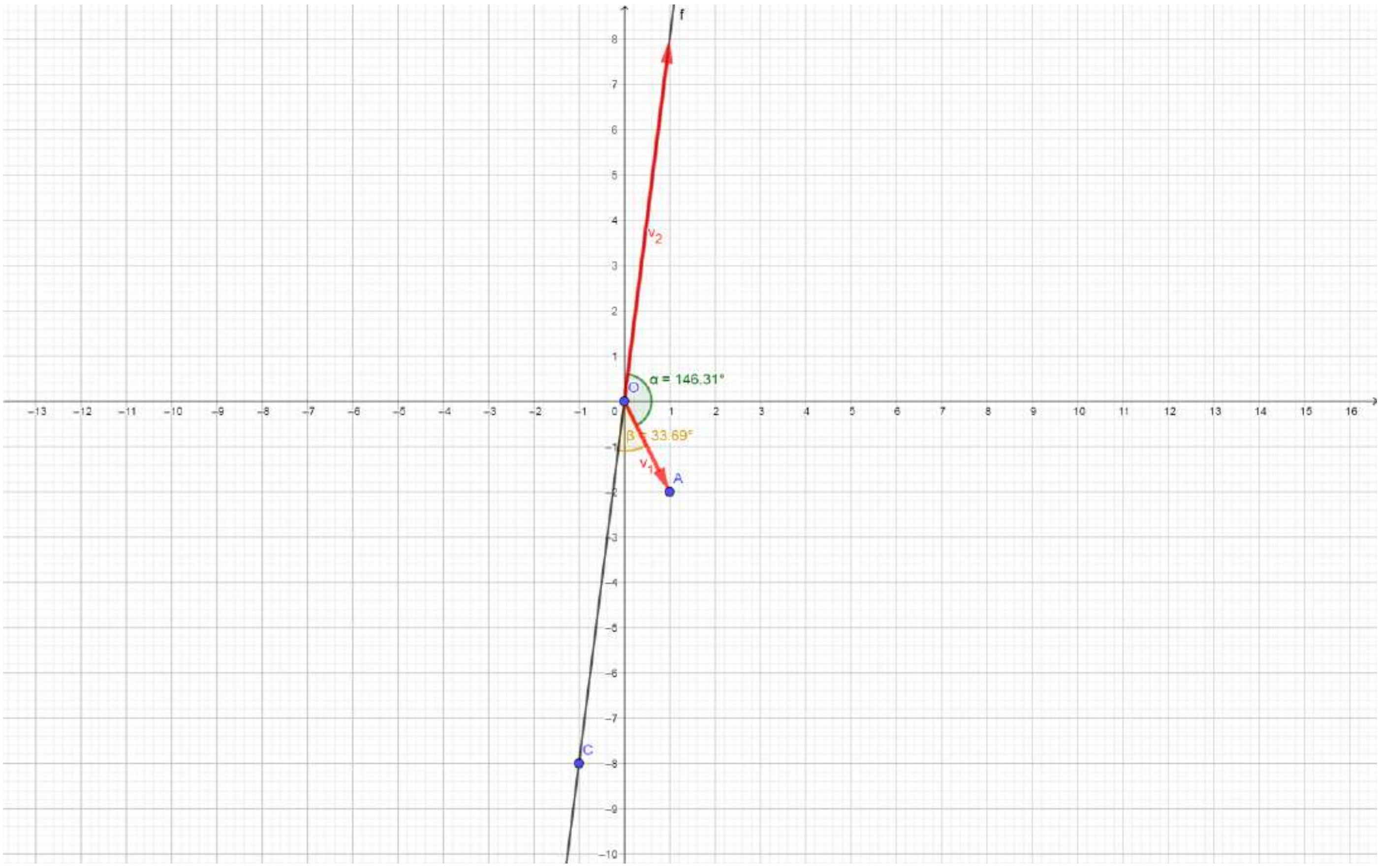
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -16 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{cases} 3x - y = 5x \Rightarrow y = -2x \\ -16x - 3y = 5y \Rightarrow 8y = -16x \Rightarrow y = -2x \end{cases} \right\} \Rightarrow (x; y) = (x; -2x) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = (1; -2)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -16 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{cases} 3x - y = -5x \Rightarrow y = 8x \\ -16x - 3y = -5y \Rightarrow -2y = -16x \Rightarrow y = 8x \end{cases} \right\} \Rightarrow (x; y) = (x; 8x) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = (1; 8)}$$

4º) hallamos el ángulo entre ambos vectores:

$$\varphi = arc\cos\left(\frac{1-16}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}}\right) = arc\cos\left(\frac{-15}{\sqrt{325}}\right) \Rightarrow \varphi \cong 33^\circ 41' 24,24'' \Rightarrow \boxed{\varphi \cong 34^\circ}$$

5º) en GeoGebra:

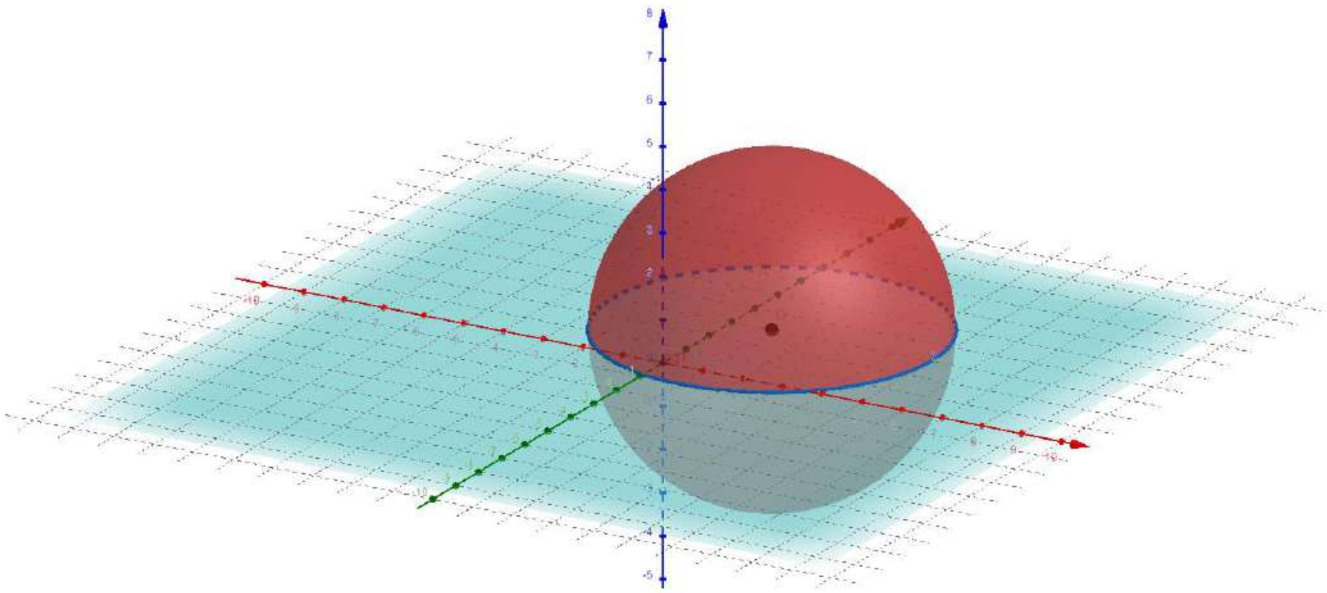


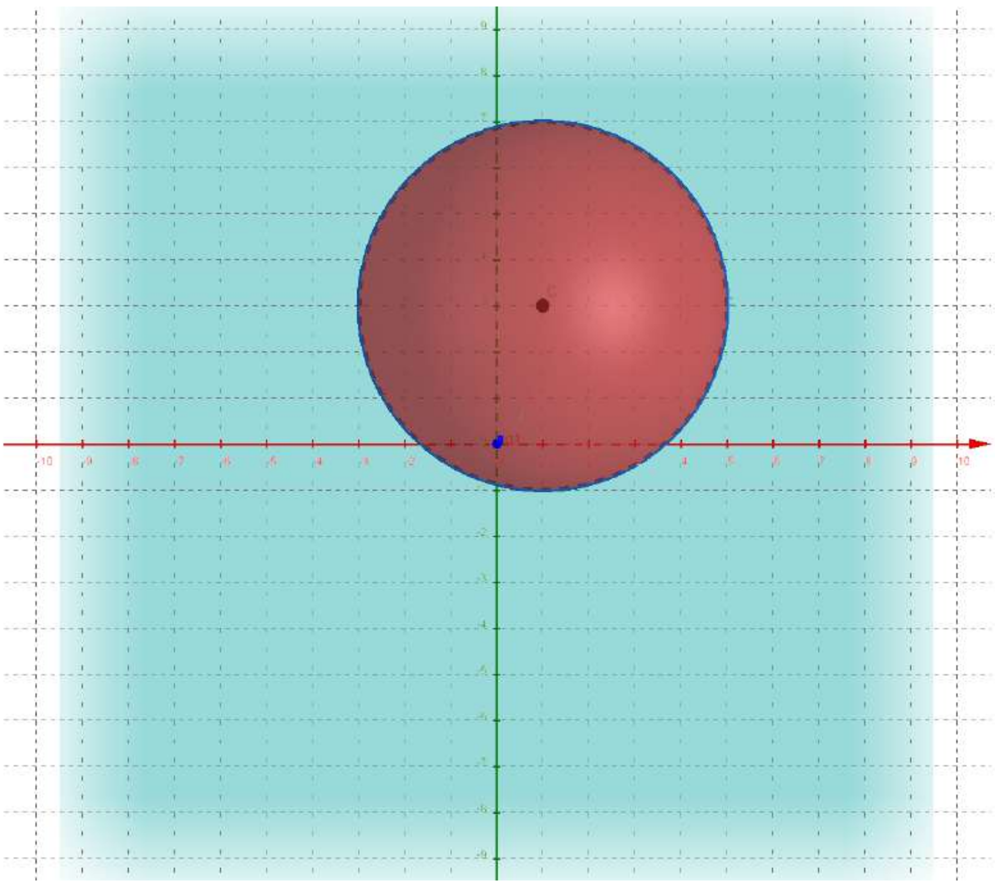
4.b) Sea la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$. Proponga un plano que al interceptar con dicha superficie dé una circunferencia, y determine el centro y el radio de la misma. Justifique por qué obtiene esa curva con la intersección que propicia.

1º) Lo mas sencillo es interceptar la esfera con el plano coordenado ***xy*** cuya ecuación es $z = 0$; obtenemos:

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16 \Rightarrow$ circunferencia de centro $C(1;3)$ y radio 4 unidades de longitud.

2º) GeoGebra nos muestra el gráfico en 3D y la vista frontal en 2D:





En la vista frontal se comprueba que al interceptar ambas superficies obtuvimos una circunferencia que, en el plano ***xy*** tiene centro $C(1;3)$ y radio 4 .