Analisis Matematico 2- INGENIERIA - Recuperatorio de Segundo Parcial - 30 de Junio de 2016.

NOMBRE..Comisión...............................

Problema 1. (10)

a) Calcular la siguiente integral doble :

$$\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{e}^{(x-y)} \, \mathsf{d}x\mathsf{d}y \ ; \ D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1-x \leqslant y \leqslant 4-x \ \wedge \ x-1 \leqslant y \leqslant x+1 \right\}$$

SOLUCION

Llamo

$$x+y=u \ , \quad -x+y=v$$

entonces nos queda

$$T(x,y) = (x+y, -x+y) = (u,v) \Longleftrightarrow \hat{T}(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}v, \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\right) = (x,y)$$

(la notación $\hat{T}$ es para indicar la función inversa de T) luego

$$\hat{T} : D^* \longrightarrow D \text{ donde } D^* = \left\{ (u,v) \in R^2 : 1 \le u \le 4 \wedge -1 \le v \le 1 \right\}$$

$$\left| \det \left(\hat{T}' \right) \right| \Longleftrightarrow \left| \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \right| \Longleftrightarrow \left| \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

por lo tanto según la fórmula de cambio de variables

$$\iint_D f(x,y) \ \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \iint_{D^*} f\left(\hat{T}(u,v)\right) \ \left| \det \left[\hat{T}'(u,v) \right] \right| \mathsf{d}u\mathsf{d}v$$

la integral queda

$$\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{e}^{(x-y)} \, \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \iint_{D^*} u^2 \mathrm{e}^{-v} \ \left(\frac{1}{2}\right) \mathsf{d}u\mathsf{d}v = \frac{1}{2}\int_1^4 u^2 \mathsf{d}u \int_{-1}^1 e^{-v} \mathsf{d}v =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)\left(-e^{-1} + e^1\right) = \frac{21}{2}\left(e - e^{-1}\right)$$

FIN

..............................:

b)Hallar el area de la región acotada por la siguiente curva:

$$C : \left(x^2+y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2-y^2\right) = 0$$

SOLUCION

Uso coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

entonces la curva queda

$$\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$$

es la Figura 1

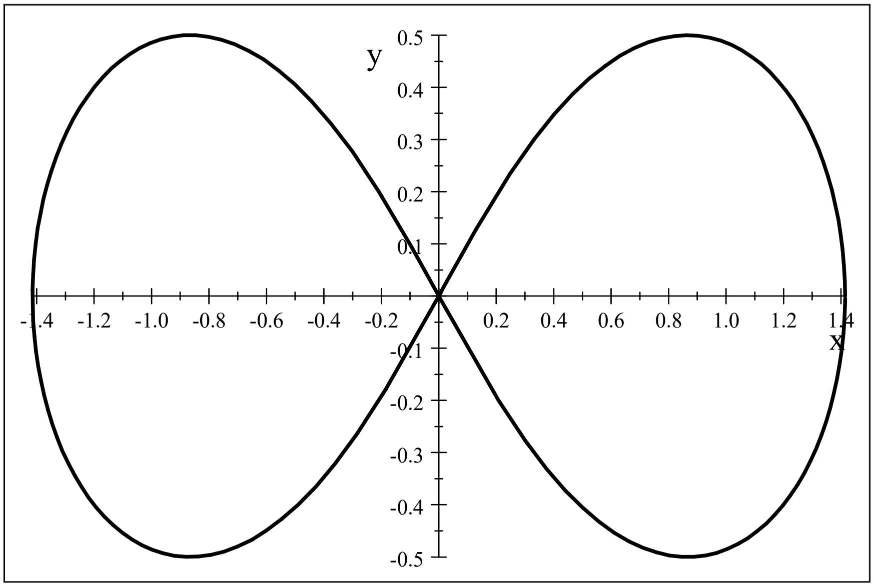

Figura 1

por lo tanto el area será

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos(2\theta)}} \rho \mathsf{d}\rho\right) \mathsf{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}a^2 \left(2\cos\left(2\theta\right)\right) d\theta = 2a^2$$

FIN

Problema 2. (20) Calcular el volumen (finito) del sólido $V \subset \mathbf{R}^3$ que definido por

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 - y^2 \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2ay - x^2 - y^2\right\} \quad (a > 0)$$

El volumen buscado está encerrado por las siguientes superficies

$$\begin{aligned} S_1 &: \ z = 2ay - x^2 - y^2 \Longleftrightarrow S_1 : z = a^2 - \left(x^2 + (y-a)^2\right) \text{ (Paraboloide)} \\ S_2 &: \ z = 0 \text{ , (Plano } XY \text{)} \\ S_3 &: \ y = x \text{ , (Plano vertical)} \\ S_4 &: \ y = -x \text{ , (Plano vertical)} \end{aligned}$$

por lo tanto la región de integracion es la de la Figura 2

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

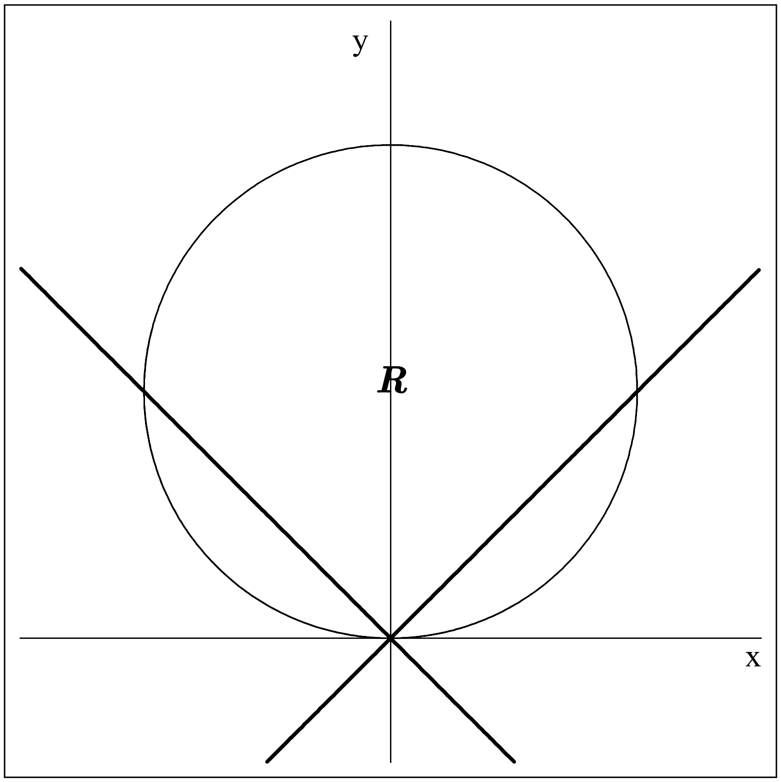

Figura 2 ($R =$ Región de integración)

entonces, pasamos a coordenadas polares y queda

$$Vol = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{2a\sin\theta} \left(2a\rho\sin\theta - \rho^2\right) \rho d\rho \right) d\theta = a^4 \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3} \right)$$

FIN

....

Problema 3. (20) Hallar el valor de la siguiente integral curvilinea

$$\int_{C^+} \frac{-y}{x^2+xy+y^2}\mathsf{d}x + \frac{x}{x^2+xy+y^2}\mathsf{d}y \quad \text{donde } C_a = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{a^2} + y^2 = 1 \right\} \tag{1}$$

SOLUCION

El campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ cumple que $Q_x - P_y = 0$ pero es discontinuo en $(0,0)$ por lo tanto para poder aplicar el teorema de Green hay que ver en que casos la curva C_a excluye al punto $(0,0)$ y eso dependerá de a con lo cual hay que considerar casos

....

Caso 1) $0 < a < 1$

En este caso la región del plano $D_a = int(C_a) =$ interior de la curva C_a , NO contiene al punto $(0,0)$ por lo tanto el campo F es continuo en D_a y por lo tanto se puede aplicar Green, luego

$$\int_{C_a} Pdx + Qdy = \int_D (Q_x - P_y)\, dxdy = 0$$

....

Caso 2) $a = 1$

En este caso la curva C_a pasa por encima de la discontinuidad de $\boldsymbol{F}$ por lo tanto hay que hacer la cuenta para ver que queda

$$C_1 = \begin{cases} x = 1 + \cos t \Longrightarrow dx = -\sin(t)\, dt \\ y = \sin t \Longrightarrow dy = \cos(t)\, dt \end{cases}$$

luego

$$F(1 + a\cos t, \sin t) = \left[\left(\frac{-y}{x^2 + xy + y^2} \ , \ \frac{x}{x^2 + xy + y^2}\right)\right]_{x=1+\cos t, y \sin t} =$$

$$= \left(\frac{-\sin t}{(\cos t + 1)(\sin t + 2)} \ , \ \frac{1 + \cos t}{(\cos t + 1)(\sin t + 2)}\right)$$

luego

$$F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \left(\frac{-\sin t}{(\cos t + 1)(\sin t + 2)} \ , \ \frac{1 + \cos t}{(\cos t + 1)(\sin t + 2)}\right) \cdot (-\sin t \ , \ \cos t) =$$

$$= \frac{\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t}{(1 + \cos t)(2 + \sin t)} = \frac{1}{2 + \sin t}$$

luego la integral queda

$$\int_{C_1} F = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

....

Caso 3) $a > 1$

En este caso la región $D_a = int(C_a)$ incluye al punto $(0, 0)$ donde $\boldsymbol{F}$ es discontinuo, por lo tanto NO se puede aplicar Green directamente hay que usar el truco de tomar una curva C tal que $C_a \subset int(C)$ (en este caso C es una curva cerrada *mas grande* que encierra a C_a) o sino $C \subset int(C_a)$(en este caso C es una curva cerrada *mas chica* que está encerrada por C_a) dado que una de las curvas es una elipse standard corrida, me parece me parece mas sencillo tomar una curva *mas grande* tal que $C_a \subset int(C)$ por lo tanto elegimos

$$C = C_k : \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + xy + y^2 = k\right\}$$

el problema es cómo elegir k de manera tal que se cumpla

$$C_a \subset int(C_k) = D_k$$

Para eso construimos el rectángulo R de vértices A, B, C, D que aparece en la Figura 3 (el que tiene los lados punteados) la linea finita es la elipse

$$x^2 + xy + y^2 = k$$

y la linea gruesa es la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + y^2 = 1$$

los vértices del rectágulo punteado R son

$$A = (1 - a, 1) \ , \quad B = (1 + a, 1) \ , \quad C = (1 + a, -1) \ , \quad D = (1 - a, -1)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

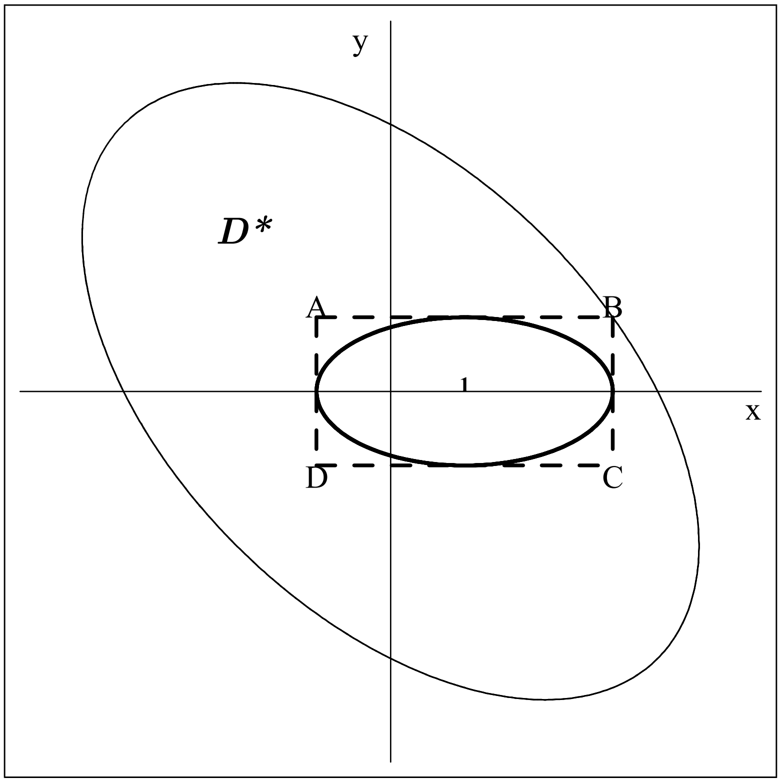

Figura 3

por lo tanto como el rectángulo R contiene a la curva C_a para asegurarse de que C_a esté incluida en $int\,(C_k)$ es suficiente que los 4 vértices del rectángulo estén incluidos en $int\,(C_k)$ pues en tal caso como $int\,(C_k)$ es un conjunto *convexo* si los 4 vértices del rectángulo R están incluidos en $int\,(C_k)$ entonces todo el rectángulo R estará incluido en $int\,(C_k)$ (ojo que si NO es convexo ya no es cierta esta última afirmación) y por lo tanto

$$C_a \subset R \subset int\,(C_k) \tag{2}$$

esto significa que para garantizar la inclusión (2) hay elegir un k conveniente, para eso reemplazamos los vértices A, B, C, D en la ecuación $x^2 + xy + y^2 = k$ y elegimos el valor de k que cumpla

$$k > \max\{g(A), g(B), g(C), g(D)\} \text{ donde } g(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

evaluamos $g(x,y)$ en los vértices y queda

$$g(A) = \left[x^2 + xy + y^2\right]_{x=1-a, y=1} = a^2 - 3a + 3$$

$$g(B) = \left[x^2 + xy + y^2\right]_{x=1+a, y=1} = a^2 + 3a + 3$$

$$g(C) = \left[x^2 + xy + y^2\right]_{x=1+a, y=-1} = a^2 + a + 1$$

$$g(D) = \left[x^2 + xy + y^2\right]_{x=1-a, y=-1} = a^2 - a + 1$$

ahora hay que elegir

$$\max\left\{a^2 - 3a + 3, a^2 + 3a + 3, a^2 + a + 1, a^2 - a + 1\right\} \quad \text{donde } a > 1$$

es fácil ver que

$$a^2 - 3a + 3 < a^2 - a + 1 < a^2 + a + 1 < a^2 < 3a + 3$$

por lo tanto elegimos

$$k = \left(a^2 + 3a + 3\right) + \varepsilon \text{ con } \varepsilon > 0$$

y listo, para este valor de k se cumple que

$$C_a \subset int\,(C_k)$$

Ahora usando Green en la región $D^* = int\,(C_k) \cap ext\,(C_a)$ (ver Figura 4)

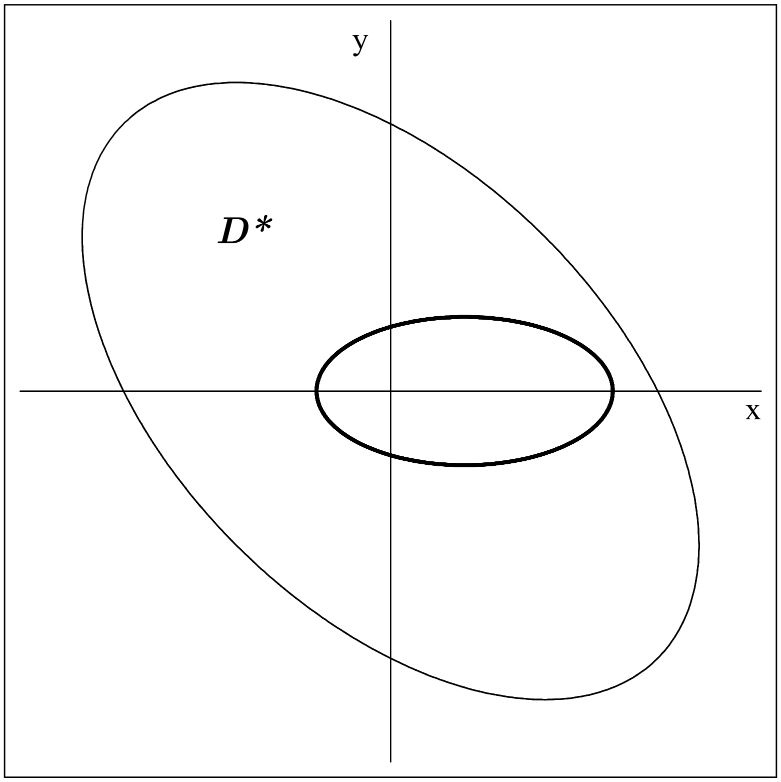

Figura 4

nos queda que

$$\int_{C_a} F = \int_{C_k} F$$

parametrizamos C_k haciendo

$$x^2 + xy + y^2 = k \Longleftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3\,(x+y)^2}{4} = k$$

entonces una posible parametrización puede ser

$$C_k = \begin{cases} x - y = 2\sqrt{k}\cos t \\ \\ x + y = 2\sqrt{\frac{k}{3}}\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{k}{3}}\sin t + \sqrt{k}\cos t \\ \\ y = \sqrt{\frac{k}{3}}\sin t - \sqrt{k}\cos t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathsf{d}x = \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\cos t - \sqrt{k}\sin t\right)\mathsf{d}t \\ \\ \mathsf{d}y = \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\cos t + \sqrt{k}\sin t\right)\mathsf{d}t \end{cases}$$

entonces si $0 \leq t \leq 2\pi$ esta parametrización recorre la curva en sentido antihorario (*positivo*), luego reemplazamos en el integrando de (1)

$$Pdx + Qdy = \frac{-y}{x^2 + xy + y^2}\mathsf{d}x + \frac{x}{x^2 + xy + y^2}\mathsf{d}y =$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\sin t - \sqrt{k}\cos t\right)\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\cos t - \sqrt{k}\sin t\right) + \left(\sqrt{\frac{k}{3}}\sin t + \sqrt{k}\cos t\right)\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\cos t + \sqrt{k}\sin t\right)}{k}\mathsf{d}t =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}k}{k}\mathsf{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{3}\mathsf{d}t =$$

luego la integral queda

$$\int_{C_a} F = \int_{C_k} F = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sqrt{3}\mathsf{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$$

$$FIN$$

....

Ejercicio 4. (20) Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(e^{x^2}\sin z\right)\check{\mathbf{I}} + \left(\tfrac{5}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}z^2\right)\check{\mathbf{J}} + \left(e^{\sin(z)}\right)\check{\mathbf{K}}$$

y la curva C cuya parametrización es

$$\mathbf{c}(t) = \left(1+\cos t \ ,\ \sin t \ ,\ 2(1+\cos t)\right) \text{ con } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Calcular la integral curvilinea

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F}$$

SOLUCION

Primero calculamos $rot(\boldsymbol{F})$ (si por un *milagro* resultara $rot(\boldsymbol{F}) = (0,0,0)$ entonces como la curva es cerrada y el campo continuo, según Stokes será

$$\int_{C^+} F = 0$$

entonces

$$rot(\boldsymbol{F}) = \left(e^{x^2}\sin z \ ,\ \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}z^2 \ ,\ e^{\sin z}\right) = \left(z \ ,\ e^{x^2}\cos(z) \ ,\ 5x\right) \neq (0,0,0)$$

(en la matematica los milagros *NO existen!....*) por lo tanto para aplicar Stokes elegimos dos superficies sencillas S_1 y S_2 tal que $S_1 \cap S_2 = C$, en este caso

$$C = \begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \\ z = 2(1+\cos t) \end{cases} \Longrightarrow S_1 : z - 2x = 0 \quad \wedge \quad S_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1$$

luego $S_1 \cap S_2 = C$ por lo tanto según Stokes

$$\int_{C^+} F = \int_{S_1} rot(F) = \int_{S_2} rot(F)$$

como una de las dos superficies es un plano $S_1 : 2x - z = 0$ elegimos esta última, ahora hay que orientar este plano de manera compatible con la curva, para eso hay que elegir uno de los dos vectores normales a S_1 o sea $\mathbf{N}_1$ o $-\mathbf{N}_1$ para elegir el vector normal $\mathbf{n}_1$ ($\mathbf{N}_1 = \dfrac{\mathbf{n}_1}{\|\mathbf{n}_1\|}$) a la superficie S_1 que sea compatible con el sentido del recorrido de C usamos el hecho de que la curva es plana, por lo tanto se sabe que

$$\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t) = \mathbf{n}_1 \tag{3}$$

donde $\mathbf{n}_1$ es el vector normal al plano en el que está incluida la curva, luego hacemos la cuenta

$$\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin t) \times (-\cos t, -\sin t, -2\cos t) = (-2, 1, 0)$$

por lo tanto la orientación del plano *inducida* por la curva corresponde al vector $\mathbf{n}_1 = (-2,1,0)$ luego

$$rot\,(\boldsymbol{F})\,(\mathbf{s}\,(u,v))\cdot\mathbf{n}_1^+ = \left(z, e^{x^2}\cos(z)\,,5x\right)\cdot(-2,1,0) = -2z+5x = -2\,(2x)+5x = x$$

luego nos queda la siguiente integral

$$\int_{D_1} x\mathsf{d}x\mathsf{d}y \quad \text{donde } D_1 = \left\{(x,y)\in R^2 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$$

luego si cambiamos coordenadas

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\int_{D_1} x\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\,\rho\mathsf{d}\rho\right)\mathsf{d}\theta = \pi$$

OBSERVACION

Hay una alternativa equivalente a (3) que es la siguiente : Supongamos que elijo como vector normal al plano $\boldsymbol{v} = (2,-1,0)$ entonces construyo la matriz

$$A = \left[\mathbf{c}'(t)\ \vdots\ \mathbf{c}''(t)\ \vdots\ \boldsymbol{v}\right] = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t & 2 \\ \cos t & -\sin t & -1 \\ -2\sin t & -2\cos t & 0 \end{bmatrix}$$

y ahora calculo

$$\det(A) = -4 < 0$$

entonces la orientación de la superficie *NO es* compatible con el sentido de recorrido de la parametrización de la curva, por lo tanto como hay solamente **2** *opciones* deduzco que el vector normal deberá ser $\boldsymbol{v}^* = -\boldsymbol{v} = (-2,1,0)$ pues en ese caso

$$\det(A) = 4 > 0$$

y listo

$$FIN$$

....

Ejercicio 5. (30) Dados los siguientes campos vectoriales

$$\mathbf{F}_1(x,y,z) = \left(xz-\tfrac{1}{2}z^2\right)\check{\mathbf{I}} + \left(x^n e^{\sin z}\right)\check{\mathbf{J}} + \left(\sin z^2\right)\check{\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{F}_2(x,y,z) = (x+z)\,\check{\mathbf{I}} + \left(x^n e^{\sin(z)}+z\right)\check{\mathbf{J}} + (z-x)\,\check{\mathbf{K}}\ ,\ (n\in N)$$

calcular las siguientes integrales

$$\textbf{i)}\ \int_{C^+}\boldsymbol{F}_1 \ \text{ donde } C = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2\ \wedge\ x^2+z^2-y = 0\}$$

$$\textbf{ii)}\ \int_{S^+}\boldsymbol{F}_2 \ \text{ donde } S = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2\ \wedge\ x^2+z^2\leqslant 1\}$$

SOLUCION

i) La curva C es la intersección de una esfera con un paraboloide eliptico, la curva esta sobre el plano $y=1$ por lo tanto una posible parametrización es

$$\mathbf{c}(\theta) = \left(\cos\theta\ ,\ 1\ ,\ \sin\theta\right) \text{ con } 0\leq\theta\leq 2\pi$$

como el calculo directo de la integral es imposible pues $e^{\sin(z)}$ quedaría $e^{\sin(\sin(\theta))}$ que no tiene primitiva, entonces una alternativa es usar el teorema de Stokes, es decir

$$\int_{C^+} F_1 = \iint_{S_1} rot\,(F_1) = \iint_{S_1} rot\,(F_1) = \iint_{S_1} rot\,(F_1)$$

donde las posibles superficies son

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y,z) \in R^3 : y = 1\right\} \quad \text{(el plano)} \\ S_2 &= \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\} \quad \text{(la esfera)} \\ S_1 &= \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2-z = 0\right\} \quad \text{(el paraboloide)} \end{aligned}$$

la elección de la superficie dependerá de la *pinta* que tenga el $rot\,(F_1)$ calculo entonces

$$rot\,(F_1) = rot\left(xz - \tfrac{1}{2}z^2 \;\mathbf{,}\; x^n e^{\sin z} \;\mathbf{,}\; \sin z^2\right) = \left(-x^n \cos(z)\, e^{\sin(z)} \;\mathbf{,}\; x - z \;\mathbf{,}\; nx^{n-1}e^{\sin(z)}\right)$$

acá es bastante obvio que la superficie óptima será el plano $y = 1$ entonces me falta elegir la orientación de dicho plano (puede ser $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$ o $-\boldsymbol{v} = (0,-1,0)$) esta orientación deberá ser compatible con el sentido del recorrido de la curva, entonces, como la curva es plana, calculo

$$\det\left[\mathbf{c}'(\theta) \;\vdots\; \mathbf{c}''(\theta) \;\vdots\; \boldsymbol{v}\right] = \det\begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

por lo tanto el vector normal debera ser $\mathbf{n}_1 = -\boldsymbol{v} = (0,-1,0)$ ahora hacemos

$$rot\,(\boldsymbol{F}_1)\,(\mathbf{s}\,(x,z)) \cdot \mathbf{n}_1 = -\,(x-z) = z - x$$

luego

$$\int_{C^+} F_1 = \iint_{S_1} rot\,(\boldsymbol{F}_1) \cdot \mathbf{N}_1 \mathsf{d}S_1 = \iint_{D_{xz}} (z-x)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}z \;\; \text{donde } D_{xz} = \left\{(x,z) \in R^2 : x^2+z^2 \leq 1\right\}$$

luego

$$\iint_{D_{xz}} (z-x)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (\rho\sin\theta - \rho\cos\theta)\,\rho d\rho\right) d\theta = 0$$

$$FIN$$

....

ii) Calcular

$$\int_{S^+} \boldsymbol{F}_2 \text{ donde } S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2 \;\wedge\; x^2+z^2 \leqslant 1\right\}$$

donde

$$F_2\,(x,y,z) = (x+z)\,\check{\mathbf{I}} + \left(x^n e^{\sin(z)} + z\right)\check{\mathbf{J}} + (z-x)\,\check{\mathbf{K}}\;,\;\; (n \in N)$$

Acá, de vuelta, la integral en forma directa es imposible, por lo tanto una alternativa es el teorema de Gauss, pero atención para poder aplicar Gauss, la superficie tiene que ser *cerrada,* y en la Figura 5 se ve que la superficie S, **NO** es cerrada, ya que S consiste en los dos casquetes de la esfera de radio $R = \sqrt{2}$ que están dentro del cilindro de radio $r = 1$, o sea

$$S = S_1 \cup S_2$$

donde

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2 \;\wedge\; x^2+z^2 \leqslant 1 \;\wedge\; y > 0\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2 \;\wedge\; x^2+z^2 \leqslant 1 \;\wedge\; y < 0\right\}$$

por lo tanto para poder aplicar Gauss hay que *cerrar* la superficie, en este caso la manera obvia es tomar la pared lateral del cilindro que esta dentro de la esfera, es decir

$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2 \;\wedge\; x^2+z^2 = 1\right\}$$

entonces ahora si

$$\iint_{S_1\cup S_2\cup S_3} F_2 = \iiint_V \operatorname{div}(F_2)$$

donde V es la región sólida de R^3definida por

$$V = \left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2\le 2 \ \wedge \ x^2+z^2\le 1\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2\le 2\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+z^2\le 1\right\}$$

en este problema

$$\iiint_V \operatorname{div}(F_2)\,\mathsf{d}V = \iiint_V 2\mathsf{d}V = 2\iiint_V \mathsf{d}V = 2vol(V) =$$

$$= 4\iint_{D_{xz}} \sqrt{2-x^2-z^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z \ \ \text{donde } D_{xz} = \left\{(x,z)\in R^2 : x^2+z^2\le 1\right\}$$

luego

$$4\iint_{D_{xz}} \sqrt{2-x^2-z^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z = 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta = 8\pi\int_0^1 \sqrt{2-\rho^2}\rho d\rho$$

$$= 8\pi\int_0^1 \sqrt{2-\rho^2}\rho d\rho = 8\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)$$

Ahora pasamos a la integral de superficie

$$\iint_{S_1\cup S_2\cup S_3} F_2 = \iint_{S_1} F_2 + \iint_{S_2} F_2 + \iint_{S_3} F_2$$

la integral pedida es

$$\iint_S F_2 = \iint_{S_1} F_2 + \iint_{S_2} F_2$$

asi que la única que hay que calcular es

$$\iint_{S_3} F_2$$

donde S_3 es

$$\left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 2\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x^2+z^2 = 1\right\}$$

si parametrizamos S_3 con

$$\mathbf{S}(u,v) = (\cos u, v, \sin u) \ \ \text{donde } \ 0\le u\le 2\pi \ \ , \ \ -1\le v\le 1$$

entonces el vector normal *saliente* será

$$\boldsymbol{n}^+ = \mathbf{S}_v\times\mathbf{S}_u = (0,1,0)\times(-\sin u, 0, \cos u) = (\cos u, 0, \sin u)$$

por lo tanto

$$F_2(S_3)\cdot\boldsymbol{n}^+ = \left(\cos u+\sin u \ \mathbf{,} \ (\cos u)^n e^{\sin(\sin(u))}+\sin u \ \mathbf{,} \ \sin u-\cos u\right)\cdot\left(\cos u \ \mathbf{,} \ 0 \ \mathbf{,} \ \sin u\right) = 1$$

por lo tanto

$$\int_{S_3} F = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^1 1dv\right)du = 4\pi \tag{4}$$

luego

$$\iint_{S_1\cup S_2\cup S_3} F_2 = \iint_{S_1} F_2 + \iint_{S_2} F_2 + \iint_{S_3} F_2 = \iiint_V \operatorname{div}(F_2) \Longleftrightarrow$$

$$\iff \iint_{S_1} F_2 + \iint_{S_2} F_2 + (4\pi) = 8\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \iff$$

$$\iff \iint_S F_2 = \iint_{S_1} F_2 + \iint_{S_2} F_2 = 8\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) - 4\pi = \frac{4}{3}\pi\left(4\sqrt{2} - 5\right)$$

ALTERNATIVA
Si NO se quiere parametrizar el cilindro se puede hacer lo siguiente
Si $g(x,y,z) = x^2 + z^2 = 1$ es la ecuación implicita del cilindro entonces el vector normal saliente al cilindro es

$$\mathbf{N}_3 = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{(2x,0,2z)}{\sqrt{4x^2+4z^2}} = \frac{(x,0,z)}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

y por lo tanto si tomo la proyección del cilindro sobre el plano XY queda

$$\mathsf{d}S_3 = \frac{\|\nabla g\|}{|g'_z|}\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \frac{\sqrt{4x^2+4z^2}}{|2z|}\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \frac{1}{|z|}\mathsf{d}x\mathsf{d}y \tag{5}$$

entonces queda

$$\mathbf{F}(S_3)\cdot\mathbf{N}_3 = \left\{(x+z)\,\check{\mathbf{I}} + \left(x^n e^{\sin(z)} + z\right)\check{\mathbf{J}} + (z-x)\,\check{\mathbf{K}}\right\}\cdot\left\{x\check{\mathbf{I}} + z\check{\mathbf{K}}\right\}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} =$$

$$= \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+z^2}} = 1 \tag{6}$$

luego la integral es

$$\int_{S_3} \mathbf{F}_2(S_3)\cdot\mathbf{N}_3\mathsf{d}S_3 \tag{7}$$

entonces al reemplazar (5) y (6) en (7) queda

$$\int_{S_3} \mathbf{F}_2(S_3)\cdot\mathbf{N}_3\mathsf{d}S_3 = \int_{D_{xy}} \frac{1}{|z|}\mathsf{d}x\mathsf{d}y =$$

donde D_{xy} es la proyección de la superficie sobre el plano XY que en este caso será

$$D_{xy} = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1 \quad \wedge \quad -1 \le y \le 1\right\}$$

y $|z| = \sqrt{1-x^2}$ luego

$$\int_{S_3} \mathbf{F}_2 = \int_{D_{xy}} \frac{1}{|z|}\mathsf{d}x\mathsf{d}y = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathsf{d}x\right)\mathsf{d}y = 4\pi \tag{8}$$

y se ve que (8) da lo mismo que (4)
....FIN...................................

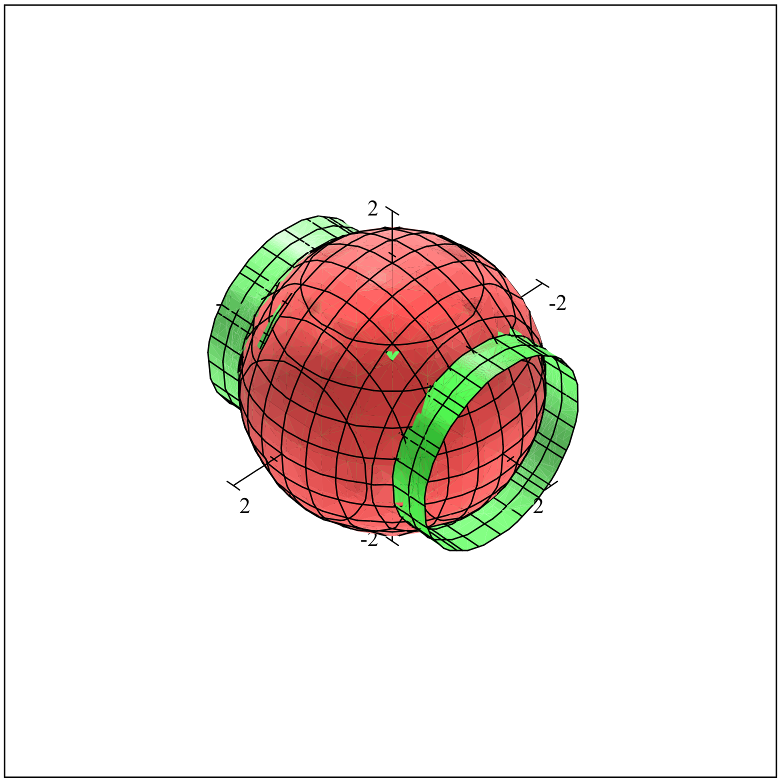

Figura 5

OBSERVACION :

Comos habrán visto en las demostraciones, en todos los problemas referidos a Green, Gauss y Stokes me he tomado el trabajo de elegir con cuidado la orientación, ya sea de la curva o de la superficie o en caso de de que haya curva y superficie (Stokes) hay que elegir la orientación compatible entre la superficie y la curva,(ver por ejemplo (3) ....la cuestión es que en NINGUN parcial ni recuppearatorio, encontré que alguien se tomara el trabajo de analizar dicha situación....agarran un vector normal...y chau!!!....,ese detalle merece una justificación o explicación de la elección del vector normal o de la orientacion de la curva , ese *detalle* es requisito MUY importante en la demostración de los teoremas (de hecho ese detalle de la orientación es lo que vuelve tremendamente dificiles estos teoremas pues justamente el concepto de orientación es un problema muy complicado de resolver en matematicas, algo muy obvio en la vida cotidiana, como que es imposible ponerse el guante izquierdo en la mano derecha (esa es la idea de orientacion) ...explicarlo matematicamente es muy dificil....y por lo tanto, en la resolución de los ejercicios hay que tenerlo en cuenta ......la corrección de los parciales ha sido un tanto *benevola* o generosa con dicho olvido u omisión sobre la orientación....pero en el Final será tenido *muy* en cuenta.....(el que avisa no traiciona)

Ric