SUCESIONES

1. Calcular el límite de la sucesión $a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - n$

Resolución:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+3} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{\sqrt{n^2}}+\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+2n+3}{n^2}}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

2. $\boldsymbol{Lim\ \ (log(n-1) - log\ \ (n^2-1)) =}$

Ejercicio resuelto:

$$Lim\ \ (log(n-1) - log\ \ (n^2-1)) = Lim\ log \frac{n-1}{(n-1)(n+1)} = \log \mathrm{Lim} \frac{1}{n+1} = \log 0 = -\infty$$

3- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{64n^2-2n}{2n^2+6}} =$

Ejercicio resuelto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{64n^2-2n}{2n^2+6}} = \sqrt[5]{\lim_{n\to\infty} \frac{64n^2-2n}{2n^2+6}} = \sqrt[5]{\lim_{n\to\infty} \frac{64n^2}{2n^2}} =$$
$$= \sqrt[5]{\lim_{n\to\infty} 32} = \sqrt[5]{32} = 2$$

4. $\lim_{n\to\infty}\left(2^{-n} - log\frac{n^2}{n^3+6}\right)$

Resolución:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{-n} - log\frac{n^2}{n^3+6}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} - \lim_{n\to\infty} log\frac{n^2}{n^3+6} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+6}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\infty} - \log 0 = 0 - (-\infty) = \infty$$

5. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-\sqrt{9n^5}+4n}{7n^2+3}$

Resolución:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-\sqrt{9n^5}+4n}{7n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{9n^5}}{7n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^{5/2}}{7n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^{1/2}}{7} = -\infty$$

LÍMITE DE FUNCIONES

1. **$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$**

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2} = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)^2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{(2-x)} = 0$$

2. **$\lim_{x\to3^+}\frac{9-x^2}{9x-6x^2+x^3}$**

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{9-x^2}{9x-6x^2+x^3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(3-x)(3+x)}{x(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)(3+x)}{x(x-3)^2}=$$
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{-(3+x)}{x(x-3)}=$$
$$=-\infty$$

3. $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{15}-x^3}{5x(x-3)^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{15}-x^3}{5x(x^2-6x+9)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{15}-x^3}{5x^3-30x^2+45x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{5x^3}=-\frac{1}{5}$$

4. $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{x^2}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{x^2}$$

Llamando $t=x+2\Leftrightarrow t-2=x$
$x\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{3}{t}\right)^{(t-2)^2\frac{t}{t}}=\lim_{t\to-\infty}\left[\left(1+\frac{3}{t}\right)^{t}\right]^{\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2-4t+4}{t}}=\left(e^3\right)^{-\infty}=0$$

5. $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x-1}\right)^{x^2}}$

Llamando $t=x-1\Leftrightarrow t+1=x$
$x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{4}{t}\right)^{(t+1)^2\frac{t}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1-\frac{4}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{t^3+2t+1}{t}}=\left(e^{-4}\right)^{+\infty}=0$$

ASÍNTOTAS

1) Hallar las eventuales asíntotas de las siguientes funciones:

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{3x^2-9x-30}}$

b. $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2+4}{x-5}}$

c. $\boldsymbol{h(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}}$

d. $i(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 3$ no queda claro al escribirlo en la plataforma

$$\boldsymbol{i(x) = \log_{0,5} x + 3}$$

2) Consideren la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x+k}}$, y obtengan, si existen, los valores de k que permitan que $\boldsymbol{f(x)}$ verifique que la función tiene como asíntota vertical a la recta x= -4

3) Consideren la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{kx^2+2}}$, y obtengan, si existen, los valores de k que permitan que $\boldsymbol{f(x)}$ verifique que la función tiene como asíntota horizontal a la recta y = 3

Resolución:

1) a)

Asíntota vertical.

Como $3x^2 - 9x - 30 \neq 0$, resulta $Dom\, f(x): R - \{-2; 5\}$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{4}{3x^2 - 9x - 30} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{4}{3x^2 - 9x - 30} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Por lo tanto x=-2 es asíntota vertical de $f(x)$.

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{4}{3x^2 - 9x - 30} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{4}{3x^2-9x-30} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto x=5 es asíntota vertical de $f(x)$.

Asíntota Horizontal.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4}{3x^2-9x-30} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{3x^2-9x-30} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Por lo tanto y=0 es asíntota horizontal de $f(x)$.

b)

Asíntota vertical.

Como $x-5 \neq 0$, resulta $Dom\ g(x): R-\{5\}$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2+4}{x-5} = \frac{29}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2+4}{x-5} = \frac{29}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto Por lo tanto x=5 es asíntota vertical de $g(x)$.

Asíntota Horizontal.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4}{x-5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\infty$$

Por lo tanto $g(x)$ no posee asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x-5}.\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x-5}-1x\quad=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x}=5$$

Por lo tanto $y=x+5$ es asíntota oblicua de $g(x)$.

c)

Asíntota vertical.

Como $\sqrt{x^2-1}\neq 0\ y\ \ x^2-1>0$, resulta $Dom\,h(x): x\in\ (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

Por lo tanto x=-1 es asíntota vertical de $h(x)$.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

Por lo tanto x=1 es asíntota vertical de $h(x)$.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x.(3)}{-x.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=3$$

Por lo tanto y=3 es asíntota horizontal de $h(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x.(-3)}{x.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-3$$

Por lo tanto y=-3 es asíntota horizontal de $h(x)$.

d)

Asíntota vertical.

Como $x > 0$, resulta $Dom\ i(x): x \in\ (0,+\infty)$

$\lim_{x\to0^+}\log_{\frac{1}{3}}x+3=+\infty$

Por lo tanto x=o es asíntota vertical de $i(x)$.

Asíntota horizontal.

$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{3}}x+3=-\infty$

Por lo tanto $i(x)$ no posee asíntota horizontal.

2)

si x=-4 es asíntota vertical, entonces:

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2}{x+k}=\infty$$

$\lim_{x\to-4}\frac{x^2}{x+k}=\frac{14}{-4+k}$, como $\frac{14}{-4+k}$ debe tender a ∞, necesariamente -

4+k debe tender a 0, por lo tanto k=4.

3)

$$f(x)=\frac{x^2}{kx^2+k2}$$

asíntota horizontal a la recta y = 3 entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{kx^2+2} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{kx^2+k2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{kx^2} = \frac{1}{k}$$

Luego

$$\frac{1}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

CONTINUIDAD

1) Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasificarlos

$$\boldsymbol{a)\ f(x) = \frac{x^4 - 7x^3 - x + 7}{x^3 - 3x^2 - 28x}}$$

$Dom_f = \mathbb{R} - \{-4; 0; 7\}$

Discontinuidad de punto infinito en x=0 y en x=-4, discontinuidad evitable en x=7

$$\boldsymbol{b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases}}$$

$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Discontinuidad de salto infinito en x=0 y de salto finito en x=1

2) Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & si\ x \neq 5 \\ 0 & si\ x = 5 \end{cases}}$$

a) **Demostrar que $f(x)$ no es continua en $x = 5$**

b) **¿Existe una función continua que coincida con $f(x)$ para todos los valores $x \neq 5$?**

$$b)\ Respuesta\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & si\ x \neq 5 \\ 10 & si\ x = 5 \end{cases}$$

3) Calcular el valor de a para que la siguiente función sea continua

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \geq 1 \\ 3 - ax^2 & si\ x < 1 \end{cases}}$$

$$Respuesta: para\ a = 1\ la\ función\ es\ continua\ en\ todo\ su\ dominio$$