1º PARCIAL VIRTUAL 2020 - SOLUCIONES

❖ Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{3x^2 - 12}$, hallar sus asíntotas.

Solución:

$$Dom\ f = (-\infty; -2]; [2; \infty)$$

No tiene asíntotas verticales
Posibles asíntotas no verticales:

Si $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-12}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-12}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3x^2-12}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-12}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} 3} = \sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x).\frac{(\sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x)}{(\sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 12 - 3x^2}{(\sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x)} == \lim_{x\to\infty} \frac{-12}{(\sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x)} = \frac{-12}{\infty + \infty} = \frac{-12}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \sqrt{3}x + 0 \iff y = \sqrt{3}x\ \ para\ x \to \infty$

Si $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-12}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-12}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{3x^2-12}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-12}{x^2}} =$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 3} = -\sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{3x^2-12} + \sqrt{3}x).\frac{(\sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x)}{(\sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 12 - 3x^2}{(\sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x)} == \lim_{x\to-\infty} \frac{-12}{(\sqrt{3x^2-12} - \sqrt{3}x)} = \frac{-12}{\infty - (-\infty)} = \frac{-12}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = -\sqrt{3}x + 0 \iff y = -\sqrt{3}x\ \ para\ x \to -\infty$

❖ Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{2x^2 - 18}$, hallar sus asíntotas.

Solución:

$$Dom\ f = (-\infty; -3]; [3; \infty)$$

No tiene asíntotas verticales
Posibles asíntotas no verticales:

Si $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-18}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-18}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x^2-18}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} 2} = \sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2-18} - \sqrt{2}x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2-18} - \sqrt{2}x).\frac{(\sqrt{2x^2-18}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2-18}+\sqrt{2}x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18-2x^2}{(\sqrt{2x^2-18}+\sqrt{2}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-18}{(\sqrt{2x^2-18}+\sqrt{2}x)} = \frac{-18}{\infty+\infty} = \frac{-18}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \sqrt{2}x + 0 \iff y = \sqrt{2}x \ para\ x \to \infty$

Si $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-18}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-18}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{2x^2-18}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-18}{x^2}} =$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 2} = -\sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-18} + \sqrt{2}x = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2-18} + \sqrt{2}x).\frac{(\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{2}x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-18-2x^2}{(\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{2}x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-18}{(\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{2}x)} = \frac{-18}{\infty-(-\infty)} = \frac{-18}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = -\sqrt{2}x + 0 \iff y = -\sqrt{2}x \ para\ x \to -\infty$

❖ Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2}$, hallar sus asíntotas.

Solución:

$$Dom\ f = (-\infty; -2]; [2; \infty)$$

No tiene asíntotas verticales
Posibles asíntotas no verticales:

Si $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-2}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}x^2-2}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2-2}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right).\frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{1}{2}x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} = \frac{-2}{\infty + \infty} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 0 \iff y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \; para \; x \to \infty$

Si $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}x^2 - 2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}} =$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right).\frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{1}{2}x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)} = \frac{-2}{\infty - (-\infty)} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x + 0 \iff y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x \; para \; x \to -\infty$

- Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{3x^2 - 27}$, hallar sus asíntotas.

  Solución:

  $$Dom\, f = (-\infty; -3]; [3; \infty)$$

  No tiene asíntotas verticales
  Posibles asíntotas no verticales:

  Si $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 27}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 27}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3x^2 - 27}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} 3} = \sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x).\frac{(\sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x)}{(\sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-27-3x^2}{(\sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-27}{(\sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x)} = \frac{-27}{\infty+\infty} = \frac{-27}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \sqrt{3}x + 0 \iff y = \sqrt{3}x \ \ para\ x \to \infty$

Si $\underline{\boldsymbol{x \to -\infty}}$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-27}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-27}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{3x^2-27}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-27}{x^2}} = =$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to\infty} 3} = -\sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{3x^2-27} + \sqrt{3}x).\frac{(\sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x)}{(\sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-27-3x^2}{(\sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-27}{(\sqrt{3x^2-27} - \sqrt{3}x)} = \frac{-27}{\infty-(-\infty)} = \frac{-27}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = -\sqrt{3}x + 0 \iff y = -\sqrt{3}x \ \ para\ x \to -\infty$

- Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{2x^2-8}$, hallar sus asíntotas.

Solución:

$$Dom\ f = (-\infty; -2]; [2; \infty)$$

No tiene asíntotas verticales
Posibles asíntotas no verticales:

Si $\underline{\boldsymbol{x \to \infty}}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-8}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-8}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x^2-8}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} 2} = \sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x).\frac{(\sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8-2x^2}{(\sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8}{(\sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x)} = \frac{-8}{\infty+\infty} = \frac{-8}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \sqrt{2}x + 0 \iff y = \sqrt{2}x \ \ para\ x \to \infty$

Si $\underline{x \to -\infty}$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-8}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-8}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{2x^2-8}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-8}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2}}$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 2} = -\sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2-8} + \sqrt{2}x).\frac{\left(\sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x\right)}{\left(\sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-8-2x^2}{\left(\sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x\right)} == \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{\left(\sqrt{2x^2-8} - \sqrt{2}x\right)} = \frac{-8}{\infty - (-\infty)} = \frac{-8}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = -\sqrt{2}x + 0 \iff y = -\sqrt{2}x \;\; para\; x \to -\infty$

❖ Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^2 - 3}$, hallar sus asíntotas.

Solución:

$$Dom\, f = (-\infty; -3]; [3; \infty)$$

No tiene asíntotas verticales
Posibles asíntotas no verticales:

Si $\underline{x \to \infty}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{3}x^2-3}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}x^2-3}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{3}x^2-3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x).\frac{\left(\frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}x^2 - 3 - \frac{1}{2}x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)} = \frac{-3}{\infty + \infty} = \frac{-3}{\infty} = 0$$

Existe asíntota no vertical $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0 \iff y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \;\; para\; x \to \infty$

Si x → ∞

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{\frac{1}{3}x^2-3}{x^2}}=-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^2-3}{x^2}}=-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2}}=$$

$$=-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}}=-\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}+\frac{\sqrt{3}}{3}x=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}+\frac{\sqrt{3}}{3}x\right).\frac{\left(\frac{1}{3}x^2-3-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)}=$$

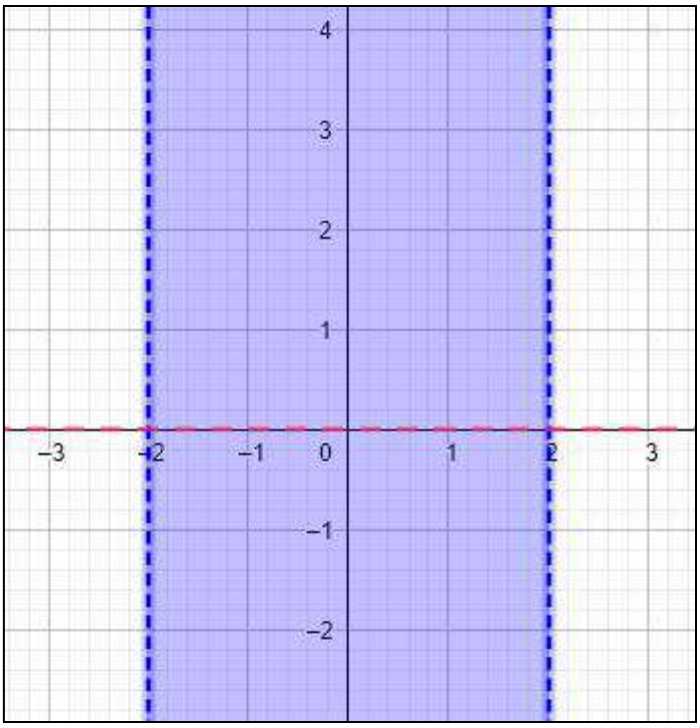
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^2-3-\frac{1}{3}x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)}=\frac{-3}{\infty-(-\infty)}=\frac{-3}{\infty}=0$$

Existe asíntota no vertical $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x+0 \iff y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x\ \ para\ x\to-\infty$

- Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y)=(8-2x^2)^{1/2y}$$

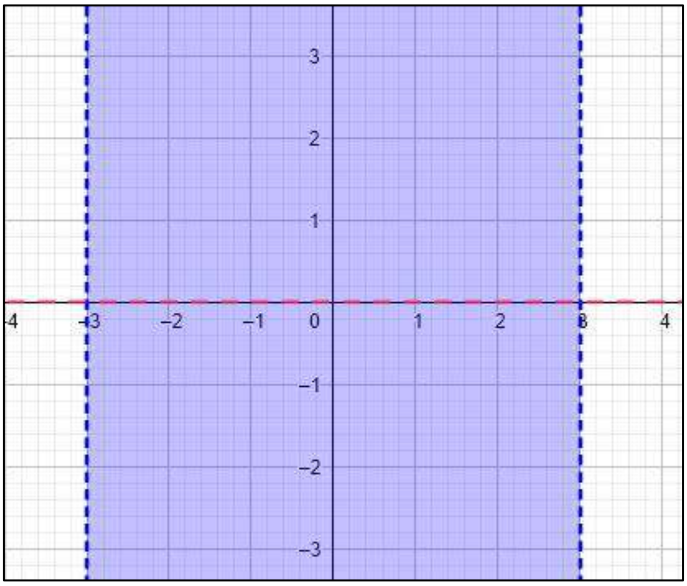
$$Domf=\{(x,y)\in R^2:(8-2x^2)>0\ e\ y\neq 0\}$$



❖ Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y) = (27 - 3x^2)^{1/3y}$$

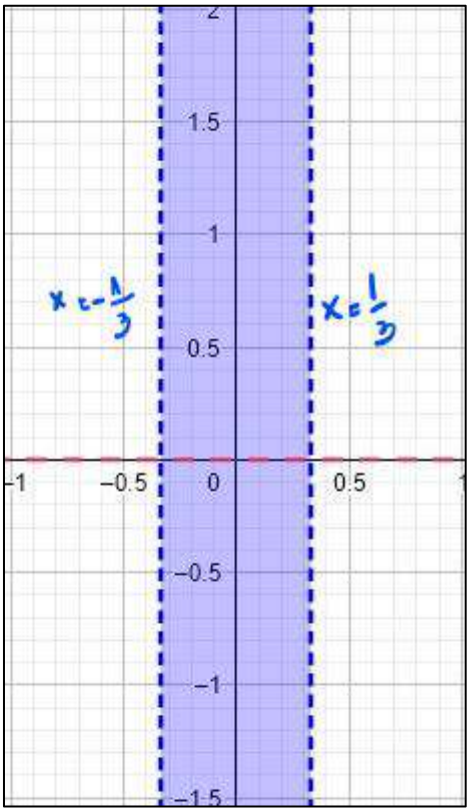
$$Domf = \{(x,y) \in R^2 : (27 - 3x^2) > 0 \; e \; y \neq 0\}$$



❖ Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y) = (3 - 27x^2)^{3/y}$$

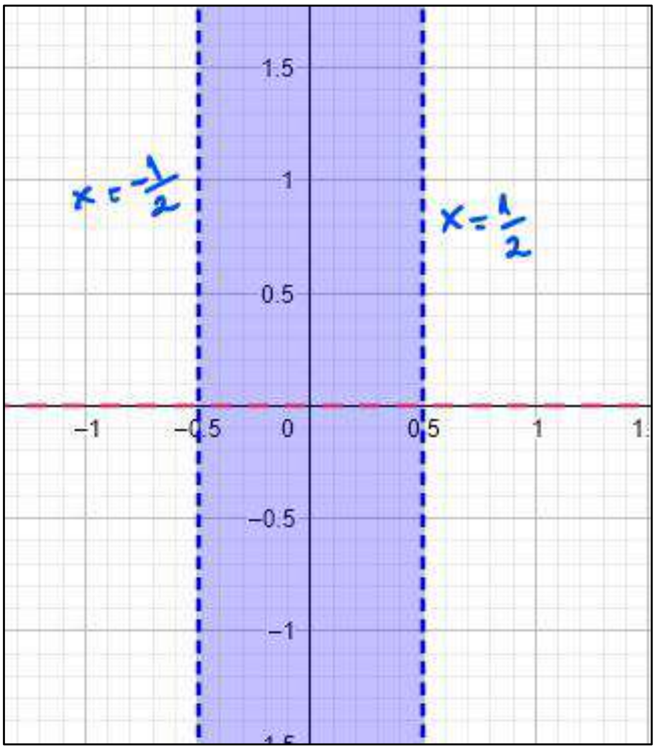
$$Domf = \{(x,y) \in R^2 : (3 - 27x^2) > 0 \; e \; y \neq 0\}$$



❖ Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y) = (2 - 8x^2)^{2/y}$$

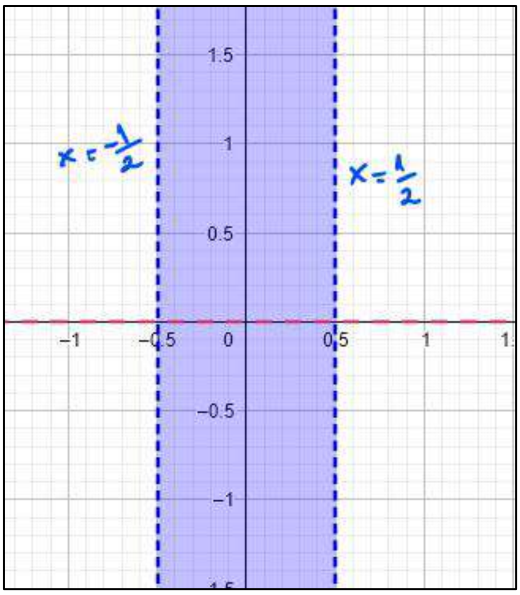
$$Domf = \{(x,y) \in R^2 : (2 - 8x^2) > 0 \ e \ y \neq 0\}$$



❖ Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y) = \left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)^{1/2y}$$

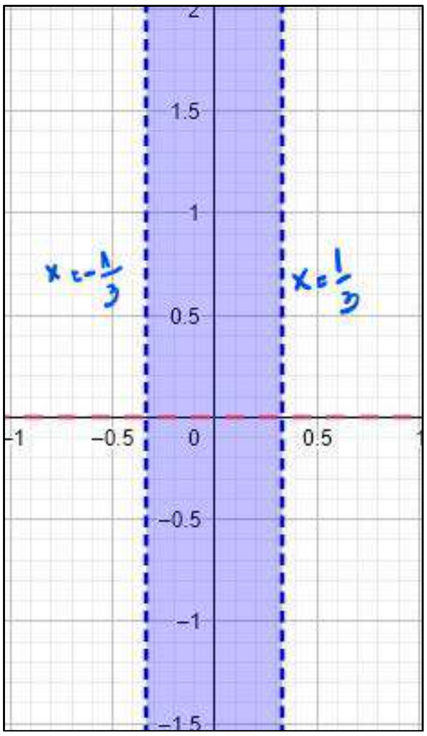
$$Domf = \left\{(x,y) \in R^2 : \left(\frac{1}{2} - 2x^2\right) > 0 \ e \ y \neq 0\right\}$$



❖ Indicar y graficar el conjunto de definición:

$$f(x;y) = \left(\frac{1}{3} - 3x^2\right)^{1/3y}$$

$$Domf = \left\{(x,y) \in R^2 : \left(\frac{1}{3} - 3x^2\right) > 0 \; e \; y \neq 0\right\}$$



❖ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $y^2 + x.y - x^2 = 5$ en el punto de abscisa $x = 4$ y ordenada negativa

Solución:

$$y - y_0 = y'_{(x_0, y_0)}(x - x_0)$$
$$y - (-7) = \frac{-3}{2}(x - 4)$$
$$y + 7 = \frac{-3}{2}x + 6$$
$$y = \frac{-3}{2}x + 6 - 7$$
$$y = \frac{-3}{2}x - 1$$

$$y_0{}^2 + x_0.y_0 - x_0{}^2 = 5$$
$$y_0{}^2 + 4.y_0 - 16 = 5$$
$$y_0{}^2 + 4.y_0 - 21 = 0$$
$$a = 1 \;;\; b = 4 \;;\; c = -21$$
$$y_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y_{1-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1(-21)}}{2.1}$$
$$y_{1-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2}$$
$$y_{1-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$
$$y_0 = \frac{-4 - 10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$y^2 + x.y - x^2 = 5$$
$$2yy' + y + xy' - 2x = 0$$
$$2yy' + xy' = 2x - y$$
$$(2y + x)y' = 2x - y$$
$$y' = \frac{2x - y}{2y + x}$$
$$y'_{(x_0, y_0)} = \frac{2x_0 - y_0}{2y_0 + x_0}$$
$$y'_{(x_0, y_0)} = \frac{2.4 - (-7)}{2(-7) + 4} = \frac{8 + 7}{-14 + 4}$$
$$y'_{(x_0, y_0)} = \frac{15}{-10} = \frac{-3}{2}$$

❖ Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva dado por $x^2(x^2+y^2)-y^2=0$ en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución:

$$y-y_0=y'_{(x_0,y_0)}(x-x_0)$$
$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$y=3x-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y=3x-\sqrt{2}$$

$$x^2(x^2+y^2)-y^2=0$$
$$2x(x^2+y^2)+x^2(2x+2yy')-2yy'=0$$
$$2x(x^2+y^2)+2x^3+2x^2yy'-2yy'=0$$
$$2x^2yy'-2yy'=-2x(x^2+y^2)-2x^3$$
$$y'=\frac{-2x(x^2+y^2)-2x^3}{2x^2y-2y}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{-2x_0({x_0}^2+{y_0}^2)-2{x_0}^3}{2{x_0}^2y_0-2y_0}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{-2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]-2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{2}}{2}-2.\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{-\sqrt{2}.\left[\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right]-2.\frac{2\sqrt{2}}{8}}{2.\frac{2}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}}=\frac{\frac{-3}{2}\sqrt{2}}{\frac{-1}{2}\sqrt{2}}=3$$

❖ Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2+y^2=16$ en el punto de abscisa $x_0=2$ y ordenada negativa.

Solución:

$$x^2+y^2=16$$
$$2x+2yy'=0$$
$$y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{-x_0}{y_0}=\frac{-2}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$${x_0}^2+{y_0}^2=16$$
$$2^2+{y_0}^2=16$$
$$4+{y_0}^2=16$$
$${y_0}^2=16-4$$
$${y_0}^2=12$$
$$|y_0|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$y_0=-2\sqrt{3}$$

$$y-y_0=y'_{(x_0,y_0)}(x-x_0)$$
$$y-(-2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$$
$$y+2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}$$
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

❖ Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 + y^2 = 8$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$ y ordenada negativa.

Solución:

$$4x^2 + y^2 = 8$$
$$4{x_0}^2 + {y_0}^2 = 8$$
$$4.1^2 + {y_0}^2 = 8$$
$$4 + {y_0}^2 = 8$$
$${y_0}^2 = 8 - 4$$
$${y_0}^2 = 4$$
$$|y_0| = \sqrt{4} = \pm 2$$
$$y_0 = -2$$

$$4x^2 + y^2 = 8$$
$$8x + 2yy' = 0$$
$$y' = \frac{-8x}{2y} = \frac{-4x}{y}$$
$$y'_{(x_0, y_0)} = \frac{-4x_0}{y_0} = \frac{-4.1}{-2}$$
$$y'_{(x_0, y_0)} = 2$$

$$y - y_0 = y'_{(x_0, y_0)}(x - x_0)$$
$$y - (-2) = 2(x - 1)$$
$$y + 2 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 - 2$$
$$y = 2x - 4$$

❖ Calcular el siguiente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \sqrt{e}$$

$$\boldsymbol{t = 2n + 1; n = \frac{t-1}{2}; t \to +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+2}{t}\right)^{\frac{t-1}{2}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}-\frac{1}{2}} = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{1/2}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

❖ Calcular el siguiente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n = \sqrt[3]{e}$$

$$\boldsymbol{t = 3n + 1; n = \frac{t-1}{3}; t \to +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+2}{t}\right)^{\frac{t-1}{3}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{3}-\frac{1}{3}} = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{1/3}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

❖ Calcular el siguiente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n-3} = e$$

$$\boldsymbol{t = n + 2; n = t - 2; t \to +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n-3} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-2+3}{t}\right)^{t-2-3} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t-5} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-5} = e.1 = e$$

- Calcular el siguiente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x-5}\right)^{x-1}=e^9$$

$$\boldsymbol{t=x-5;x=t+5;t\to+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x-5}\right)^{x-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+5+4}{t}\right)^{t+5}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{9}{t}\right)^{t+5}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{9}{t}\right)^{t}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5}=e^9$$

- Calcular el siguiente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x-5}\right)^{x}=e^{\frac{9}{2}}$$

$$\boldsymbol{t=2x-5;x=\frac{t+5}{2};t\to+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x-5}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+5+4}{t}\right)^{\frac{t+5}{2}}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{9}{t}\right)^{\frac{t}{2}-\frac{5}{2}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{9}{t}\right)^{t}\right)^{1/2}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{5}{2}}=e^{9/2}$$

- Hallar el monto que se obtendría de un capital de \$10.000 colocado a una tasa nominal anual del 15% durante 3 años con capitalización:
  a) Mensual
  b) Continua

Solución:

a) $M=10000\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{3.12}=15639{,}9438$

b) $M=10000.e^{0.15.3}=15683{,}312$

- Para cierto producto, la función de demanda es $p=300-2x$, y el costo promedio es

$$\bar{C}=x+\frac{2000}{x}+60$$

  a) Determinar la función beneficio
  b) Decidir si existe el punto de no pérdida no ganancia. Justificar

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } p=300-2x \text{ entonces } I(x)=300x-2x^2\ ;\\ \text{Si } \bar{C}=x+\frac{2000}{x}+60 \text{ entonces } C(x)=x^2+2000+60x\end{array}\right\}B(x)=-3x^2+240x-2000$

b) $B(x)=0\leftrightarrow-3x^2+240x-2000=0\leftrightarrow x_1=9{,}45\ \ ;\ \ x_2=70{,}55$

- Dadas las funciones $p = p(x) = \frac{8000}{x}$ y $p = p(x) = \frac{x}{40} + 10$ donde p indica el precio por unidad de un determinado bien y x la cantidad de ese bien ofrecida/demandada en el mercado.

  a) Decidir cuál corresponde a una función de oferta y cuál a una de demanda. Justificar

$$p = p(x) = \frac{8000}{x} \ \ demanda, corresponde\ a\ una\ curva\ de \text{ hiperbola } en\ el\ 1º\ cuadrante\ decreciente$$

$$p = p(x) = \frac{x}{40} + 10\ \ oferta, corresponde\ a\ una \text{ recta } creciente\ ya\ que\ su\ pendiente\ es\ positiva$$

  b) obtener el punto de equilibrio.

  $\frac{8000}{x} = \frac{x}{40} + 10 \leftrightarrow 8000 = \frac{x^2}{40} + 10x \leftrightarrow \frac{x^2}{40} + 10x - 8000 = 0 \leftrightarrow x_1 = 400$; $\cancel{x_2 = -800}$

  Si $x_e = 400 \rightarrow p_e = \frac{8000}{400} = 20$. Resulta: P (400,20)

- Una empresa familiar, decide vender sus productos por unidad a 8,35 UM cada uno; vendiendo todo lo producido. El costo fijo de producción asciende a 2116 UM y el costo variable a 7,25 UM por unidad. Se pide averiguar:
  a) A qué nivel de producción se sufre una pérdida de 1150 UM
  b) A qué nivel de producción ocurre el punto de no pérdida no ganancia.

Solución:

$I(x) = 8{,}35x \quad C(x) = 7{,}25x + 2116 \quad B(x) = 8{,}35x - 7{,}25x - 2116 = 1{,}1x - 2116$

a) $B(x) = -1150 \ \leftrightarrow\ 1{,}1x - 2116 = -1150 \ \leftrightarrow\ x = \frac{-1150+2116}{1{,}1} = 878{,}18$

b) $B(x) = 0 \ \leftrightarrow\ 1{,}1x - 2116 = 0 \ \leftrightarrow\ x = \frac{2116}{1{,}1} \ \leftrightarrow\ x = 1923{,}63$