Matemática

Clave de corrección primer parcial

Tercer turno – Tema 1 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ si se sabe que la recta perpendicular a $y = -\frac{1}{2}x + 4$ pasa por los puntos $(3; 1)$ y $(a - 3; 7)$.

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta que buscamos.

Por ser perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 4$ sabemos que

$$m = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

Por otro lado, como pasa por el punto $(3; 1)$ tenemos que $1 = m(3) + b$.

Entonces:

$$m = 2$$

$$1 = 3m + b \quad \leftrightarrow \quad 1 = 3 \cdot (2) + b \quad \leftrightarrow \quad b = -5$$

La ecuación de la recta es $y = 2x - 5$

La recta hallada pasa también por el punto $(a - 3; 7)$, entonces:

$$7 = 2(a - 3) - 5$$

$$7 = 2a - 6 - 5$$

$$7 + 6 + 5 = 2a \quad \leftrightarrow \quad 18 = 2a \quad \leftrightarrow \quad a = 9$$

Otra manera de resolver el ejercicio

La recta que estamos buscando es perpendicular a la dada, en consecuencia, sus pendientes son inversas y opuestas, por lo tanto:

$$m = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

Por otro lado, sabemos que la recta que buscamos pasa por los puntos $(3; 1)$ y $(a - 3; 7)$. Podemos entonces reemplazar las coordenadas de los puntos en la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{7-1}{a-3-3} = \frac{6}{a-6}$$

Sabemos que $m = 2$, por lo tanto:

$$2 = \frac{6}{a-6}$$

$$2\,.(a-6) = 6$$

$$2a - 12 = 6$$

$$2\,a = 6 + 12$$

$$a = 18 : 2$$

$$a = 9$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dada la función

$$f(x) = \frac{a+2x}{x+1}$$

hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f^{-1}(0) = 1$

Para hallar la función inversa de f despejamos x en función de y:

$$y = \frac{a+2x}{x+1}$$

$$y(x+1) = a + 2x$$

$$yx + y = a + 2x$$

$$yx - 2x = a - y$$

$$x(y-2) = a - y$$

$$x = \frac{a\ -y}{y\ -\ 2}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables,

$$f^{-1}(x) = \frac{a-x}{x-2}$$

Sabemos que $f^{-1}(0) = 1$, entonces:

$$\frac{a-0}{0-2} = 1$$

$$a = \ -2$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $f^{-1}(0) = 1$ entonces $f\left(f^{-1}(0)\right) = f(1)$, pero como $f\left(f^{-1}(0)\right) = 0$ tenemos que

$$f(1) = 0$$

$$\frac{a + 2(1)}{(1) + 1} = 0$$

$$a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -2$$

Ejercicio 3 (3 puntos)
Representar en el plano el siguiente conjunto

$$M = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |2x - 1| \leq 3 \ ; \ |y| > 1\}$$

Sea $(x; y) \in M$.

Los valores de la coordenada x satisfacen que

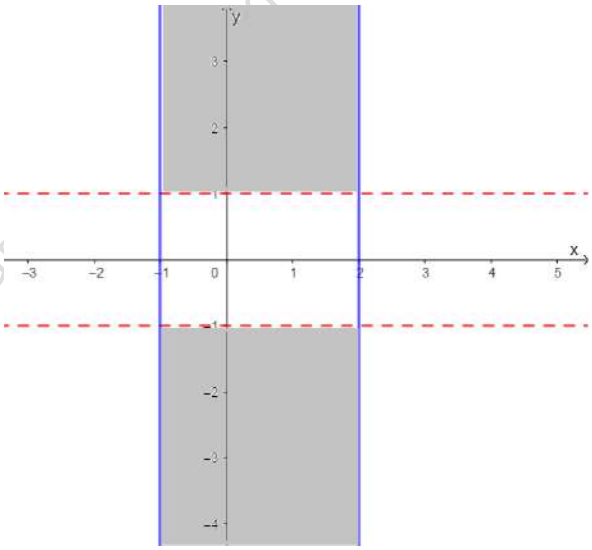
$$|2x - 1| \leq 3$$
$$-3 \leq 2x - 1 \leq 3$$
$$-3 + 1 \leq 2x \leq 3 + 1$$
$$-2 \leq 2x \leq 4$$
$$-1 \leq x \leq 2$$

Los valores de la coordenada y satisfacen que

$$|y| > 1 \quad \rightarrow \quad y < -1 \ o \ \ y > 1$$

Entonces,

$$M = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 2 \ \ ; \ y < -1 \ o \ \ y > 1\}$$



Ejercicio 4 (2 puntos)
Expresar como intervalo o unión de intervalos el siguiente conjunto:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\; / \; -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \leq \frac{3}{2}x - 1\right\}$$

Resolvemos la inecuación:

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \leq \frac{3}{2}x - 1$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 - \frac{3}{2}x + 1 \leq 0$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \leq 0$$
$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

El conjunto que buscamos está formado por todos los valores de x para los cuales la cuadrática $x^2 + x - 6 \geq 0$.

La cuadrática $x^2 + x - 6$ se anula cuando $x = 2$ y $x = -3$

Analizamos el signo de la cuadrática $x^2 + x - 6$ en los intervalos determinados por sus raíces:

- en el intervalo $(-\infty; -3)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = -4$ tenemos que $(-4)^2 + (-4) - 6 = 16 - 4 - 6 = 6$
- en el intervalo $[-3; 2]$ el signo es negativo ya que si especializamos en $x = 0$ tenemos que $(0)^2 + (0) - 6 = -6$
- en el intervalo $(2; +\infty)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = 5$ tenemos que $(5)^2 + (5) - 6 = 25 + 5 - 6 = 24$

Entonces,

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\; / \; -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \leq \frac{3}{2}x - 1\right\} = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Resolvemos la inecuación:

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \leq \frac{3}{2}x - 1$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 - \frac{3}{2}x + 1 \leq 0$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \leq 0$$
$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

El conjunto que buscamos está formado por todos los valores de x para los cuales la cuadrática $x^2 + x - 6 \geq 0$.

La cuadrática $x^2 + x - 6$ se anula cuando $x = 2$ y $x = -3$; expresamos en forma factorizada la ecuación:

$$(x + 3)(x - 2) \geq 0$$

Se desprenden 2 situaciones:

- Situación I:
  $(x + 3) \geq 0 \quad y\ además \quad (x - 2) \geq 0$
  $x \geq -3 \quad y\ además \quad x \geq 2$

  Solución I= $[2;\ +\infty)$

- Situación II:
  $(x + 3) \leq 0 \quad y\ además \quad (x - 2) \leq 0$
  $x \leq -3 \quad y\ además \quad x \leq 2$

  Solución II= $(-\infty; -3]$

Entonces,

$$\left\{x \in \mathbb{R} \ \ / \ -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \leq \frac{3}{2}x - 1\right\} = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$