MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

SEGUNDO TURNO – TEMA 1

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación

$$|x+2| \leq 3$$

sea igual al intervalo $[1-a; 2+7b]$

Resolución:

Resolvemos la inecuación dada aplicando propiedad de módulo:

$$-3 \leq x+2 \leq 3$$

$$-5 \leq x \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in [-5; 1]$$

Por lo tanto, podemos igualar los extremos del intervalo para hallar los valores pedidos:

$$1-a = -5 \qquad \Longrightarrow \qquad -a = -5-1 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 6$$

$$2+7b = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 7b = 1-2 \qquad \Longrightarrow \qquad b = -\frac{1}{7}$$

Los valores de las constantes son: $a = 6, b = -\frac{1}{7}$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar si el intervalo $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ se encuentra contenido en el conjunto de negatividad del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ si se sabe que $x = 1$ es raíz del polinomio.

Justificar la respuesta.

Resolución:

Como $x = 1$ es raíz de del polinomio, podemos aplicar Ruffini para dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - 1)$

	1	- 2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

Entonces:

$$P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

Calculamos las raíces de la expresión cuadrática para expresarla en forma factorizada.

La fórmula de cálculo es

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema tenemos que $a = 1,\ b = -1, c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

Entonces,

$$(x^2 - x - 2) = (x - 2) \cdot \big(x - (-1)\big) = (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Finalmente

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$$

donde $x = 1, x_1 = 2, x_2 = -1$ son las raíces del polinomio P.

Aplicando la consecuencia del Teorema de Bolzano, analizamos el signo del polinomio en cada uno de los intervalos determinados por sus raíces. Para esto elegimos un punto en cada uno de los intervalos y vemos cual es el valor del polinomio.

Intervalo	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	(1;2)	(2; +∞)
Valor del polinomio en un elemento del intervalo	$P(-2) < 0$	$P(-2) > 0$	$P(1{,}5) < 0$	$P(3) > 0$
Signo del polinomio	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

$C^- = (-\infty; -1) \cup (1; 2)$

El intervalo $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **no se encuentra** contenido en el intervalo de negatividad del polinomio. Por lo tanto, el signo del polinomio en dicho intervalo no puede ser negativo.

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales está definida la función "h" si

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$

donde

$$f(x) = 2 + \frac{4}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3-x}{x+2}$$

Resolución:

Hallamos la expresión de la función h:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = 2 + \frac{4}{\frac{3-x}{x+2}} = 2 + \frac{4 \cdot (x+2)}{3-x}$$

Si operamos algebraicamente llegamos a la expresión

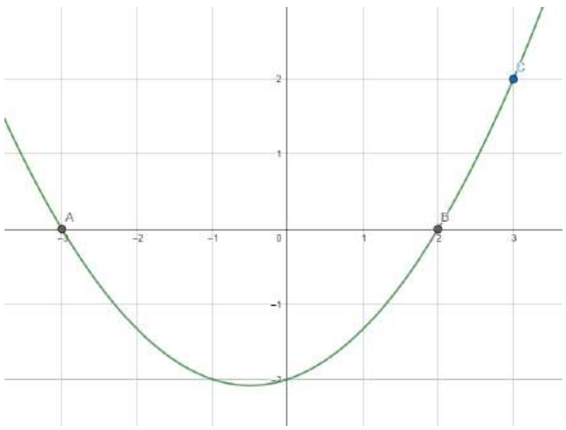
$$h(x) = \frac{2x+14}{3-x}$$

El único valor que no puede tomar la variable x es aquel que anula al denominador:

$$3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

En consecuencia, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Hallar la expresión factorizada de la ecuación de la parábola que contiene a los puntos A, B, C que se muestran en el gráfico.



Resolución:

En el gráfico podemos observar que la parábola tiene dos raíces (cruza al $eje\ x$ dos veces).
La expresión factorizada de la parábola será de la forma

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

con x_1, x_2 raíces de la parábola.

Observamos los puntos señalados en el gráfico:

- Del punto $A = (-3; 0)$ podemos deducir que $x = -3$ es raíz de la parábola.
- Del punto $B = (2; 0)$ podemos deducir que $x = 4$ es raíz de la parábola.

Reemplazamos las raíces en la expresión factorizada:

$$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal utilizamos las coordenadas del punto C el cual pertenece a la parábola:

$$y(3) = 2$$

$$a \cdot (3+3) \cdot (3-2) = 2$$

$$6a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de la parábola es:

$$y = \frac{1}{3} \cdot (x+3) \cdot (x-2)$$

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

SEGUNDO TURNO – TEMA 2

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales está definida la función "g" si

$$g(x) = f\big(h(x)\big)$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{x} - 5 \quad ; \quad h(x) = \frac{4-3x}{5x-10}$$

Resolución:

Hallamos la expresión de la función g:

$$g(x) = f\big(h(x)\big) = \frac{1}{\frac{4-3x}{5x-10}} - 5 = \frac{5x-10}{4-3x} - 5$$

Operando algebraicamente llegamos a la expresión

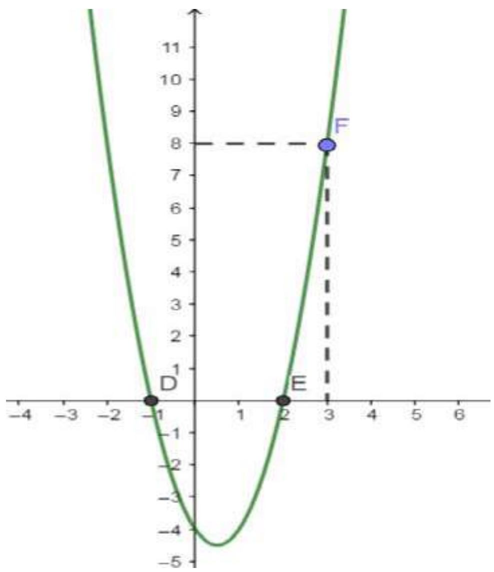
$$g(x) = \frac{20x-30}{4-3x}$$

El único valor que no puede tomar la variable x es aquel que anula al denominador:

$$4 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}$$

En consecuencia, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Hallar la expresión factorizada de la ecuación de la parábola que contiene a los puntos $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ que se muestran en el gráfico.



Resolución:

En el gráfico podemos observar que la parábola tiene dos raíces (cruza al $eje\ x$ dos veces).

La expresión factorizada de la parábola será de la forma

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

con x_1, x_2 raíces de la parábola.

Observamos los puntos señalados en el gráfico:

- Del punto $D = (-1; 0)$ podemos deducir que $x = -1$ es raíz de la parábola.
- Del punto $E = (2; 0)$ podemos deducir que $x = 2$ es raíz de la parábola.

Reemplazamos las raíces en la expresión factorizada:

$$y = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal utilizamos las coordenadas del punto F el cual pertenece a la parábola:

$$y(3) = 8$$

$$a \cdot (3+1) \cdot (3-2) = 8$$

$$4a = 8 \quad \Longrightarrow \quad a = 2$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de la parábola es:

$$y = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los valores de las constantes $c, d \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación

$$|x-4| \leq 1$$

sea igual al intervalo $[2+3c; d-1]$

Resolución:

Resolvemos la inecuación dada aplicando propiedad de módulo:

$$-1 \leq x-4 \leq 1$$

$$3 \leq x \leq 5 \quad \Longrightarrow \quad x \in [3; 5]$$

Por lo tanto, podemos igualar los extremos del intervalo para hallar los valores pedidos:

$$2 + 3c = 3 \quad \Longrightarrow \quad 3c = 1 \quad \Longrightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$d - 1 = 5 \quad \Longrightarrow \quad d = 6$$

Los valores de las constantes son: $c = \frac{1}{3} \quad d = 6$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Determinar el signo del polinomio $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ en el intervalo $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ si se sabe que una de sus raíces es $x = -2$. Justificar la respuesta.

Resolución:

Como $x = -2$ es raíz de del polinomio, podemos aplicar Ruffini para dividir el polinomio $Q(x)$ por $\left(x - (-2)\right) = (x + 2)$

	1	4	1	-6
-2		-2	-4	6
	1	2	-3	0

Entonces:

$$Q(x) = 1 \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$$

Calculamos las raíces de la expresión cuadrática para expresarla en forma factorizada.
La fórmula de cálculo es

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema tenemos que $a = 1, b = 2, c = -3$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$

Entonces

$$(x^2 + 2x - 3) = (x - 1) \cdot \big(x - (-3)\big) = (x - 1) \cdot (x + 3)$$

Finalmente tenemos que

$$Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$

donde $x = -2, x_1 = 1, x_2 = -3$ son las raíces del polinomio Q.

Aplicando la consecuencia del Teorema de Bolzano, analizamos el signo del polinomio en cada uno de los intervalos determinados por sus raíces. Para esto elegimos un punto en cada uno de los intervalos y vemos cual es el valor del polinomio.

Intervalo	$(-\infty; -3)$	$(-3; -2)$	(-2;1)	(1; +∞)
Valor del polinomio en un elemento del intervalo	$Q(-4) < 0$	$Q(-2{,}5) > 0$	$Q(0) < 0$	$Q(3) > 0$
Signo del polinomio	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

$C^+ = (-3; -2) \cup (1; +\infty)$

$C^- = (-\infty; -3) \cup (-2; 1)$

El intervalo $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ está contenido en el intervalo de negatividad del polinomio.

Por lo tanto, el signo de $Q(x)$ en dicho intervalo es negativo.

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

SEGUNDO TURNO – TEMA 3

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar los valores de las constantes $r, s \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación

$$|x+9| \leq 7$$

sea igual al intervalo $[2r+1; 1-s]$

Resolución:

Resolvemos la inecuación dada aplicando propiedad de módulo:

$$-7 \leq x+9 \leq 7$$

$$-16 \leq x \leq -2 \quad \Longrightarrow \quad x \in [-16; -2]$$

Por lo tanto, podemos igualar los extremos del intervalo para hallar los valores pedidos:

$$2r+1 = -16 \quad \Longrightarrow \quad 2r = -17 \quad \Longrightarrow r = -\frac{17}{2}$$

$$1-s = -2 \quad \Longrightarrow \quad s = 3$$

Los valores de las constantes son: $r = -\frac{17}{2}$ $s = 3$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar si el intervalo $(2;+\infty)$ se encuentra contenido en el conjunto de positividad del polinomio

$$R(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

si se sabe que $R(-4) = 0$.

Justificar la respuesta.

Resolución:

Si $R(-4) = 0$, quiere decir que, $x = -4$ es raíz de del polinomio.

Podemos aplicar Ruffini para dividir el polinomio $R(x)$ por $\left(x - (-4)\right) = (x + 4)$

	1	5	2	-8
-4		-4	-4	8
	1	1	-2	0

Entonces:

$$R(x) = 1 \cdot (x + 4) \cdot (x^2 + x - 2)$$

Calculamos las raíces de la expresión cuadrática para expresarla en forma factorizada.

La fórmula de cálculo es

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema tenemos que $a = 1,\ b = 1, c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

Entonces,

$$(x^2 + x - 2) = (x - (-2)) \cdot (x - 1) = (x + 2) \cdot (x - 1)$$

Finalmente

$$R(x) = (x + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$$

donde $x = -4, x_1 = -2, x_2 = 1$ son las raíces del polinomio R.

Aplicando la consecuencia del Teorema de Bolzano, analizamos el signo del polinomio en cada uno de los intervalos determinados por sus raíces. Para esto elegimos un punto en cada uno de los intervalos y vemos cual es el valor del polinomio.

Intervalo	$(-\infty; -4)$	$(-4; -2)$	(-2;1)	(1; +∞)
Valor del polinomio en un elemento del intervalo	$R(-5) < 0$	$R(-3) > 0$	$R(-1) < 0$	$R(3) > 0$
Signo del polinomio	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

El polinomio tiene signo positivo en el conjunto

$$C^+ = (-4; -2) \cup (1; +\infty)$$

Por lo tanto, el intervalo $(2; +\infty)$ se encuentra contenido en el conjunto de positividad del polinomio.

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales está definida la función "f" si

$$f(x) = h\big(g(x)\big)$$

donde

$$h(x) = -5 + \frac{2}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3-x}{25x+100}$$

Resolución:

Hallamos la expresión de la función f:

$$f(x) = h\big(g(x)\big) = -5 + \frac{2}{\frac{3-x}{25x+100}} = -5 + \frac{2\cdot(25x+100)}{3-x}$$

Operando algebraicamente llegamos a la expresión

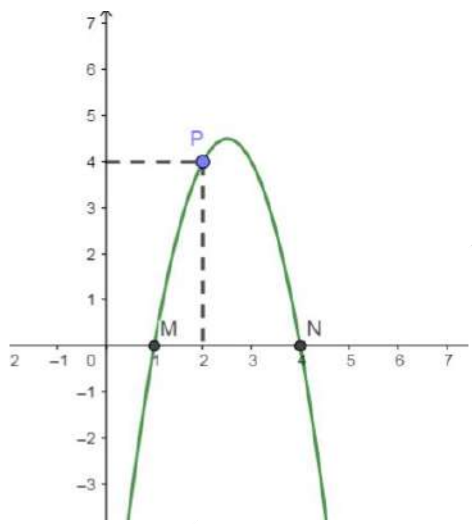
$$f(x) = \frac{55x+185}{3-x}$$

El único valor que no puede tomar la variable x es aquel que anula al denominador:

$$3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

En consecuencia, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Hallar la expresión factorizada de la ecuación de la parábola que contiene a los puntos $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{P}$ que se muestran en el gráfico.



Resolución:

En el gráfico podemos observar que la parábola tiene dos raíces (cruza al $eje\ x$ dos veces).
La expresión factorizada de la parábola será de la forma

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Observamos los puntos señalados en el gráfico:

- Del punto $M = (1; 0)$ podemos deducir que $x = 1$ es raíz de la parábola.
- Del punto $N = (4; 0)$podemos deducir que $x = 4$ es raíz de la parábola.

Reemplazamos las raíces en la expresión factorizada:

$$y = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal utilizamos las coordenadas del punto P que pertenece a la parábola

$$y(2) = 4$$

$$a \cdot (2-1) \cdot (2-4) = 4$$

$$-2a = 4 \quad \Longrightarrow \quad a = -2$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de la parábola es:

$$y = -2 \cdot (x-1) \cdot (x-4)$$

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

SEGUNDO TURNO – TEMA 4

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales está definida la función "h" si

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$

donde

$$f(x) = 2 + \frac{4}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3 - x}{x + 2}$$

Resolución:

Hallamos la expresión de la función h:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = 2 + \frac{4}{\frac{3 - x}{x + 2}} = 2 + \frac{4 \cdot (x + 2)}{3 - x}$$

Si operamos algebraicamente llegamos a la expresión

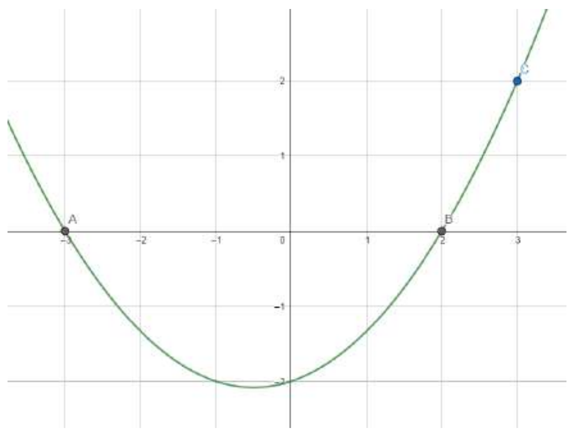
$$h(x) = \frac{2x + 14}{3 - x}$$

El único valor que no puede tomar la variable x es aquel que anula al denominador:

$$3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

En consecuencia, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Hallar la expresión factorizada de la ecuación de la parábola que contiene a los puntos A, B, C que se muestran en el gráfico.



Resolución:

En el gráfico podemos observar que la parábola tiene dos raíces (cruza al $eje\ x$ dos veces).
La expresión factorizada de la parábola será de la forma

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

con x_1, x_2 raíces de la parábola.

Observamos los puntos señalados en el gráfico:

- Del punto $A = (-3; 0)$ podemos deducir que $x = -3$ es raíz de la parábola.
- Del punto $B = (2; 0)$ podemos deducir que $x = 4$ es raíz de la parábola.

Reemplazamos las raíces en la expresión factorizada:

$$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal utilizamos las coordenadas del punto C el cual pertenece a la parábola:

$$y(3) = 2$$

$$a \cdot (3+3) \cdot (3-2) = 2$$

$$6a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la expresión factorizada de la parábola es:

$$y = \frac{1}{3} \cdot (x+3) \cdot (x-2)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación

$$|x+2| \leq 3$$

sea igual al intervalo $[1-a; 2+7b]$

Resolución:

Resolvemos la inecuación dada aplicando propiedad de módulo:

$$-3 \leq x+2 \leq 3$$

$$-5 \leq x \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in [-5; 1]$$

Por lo tanto, podemos igualar los extremos del intervalo para hallar los valores pedidos:

$$1 - a = -5 \quad \Longrightarrow \quad -a = -5 - 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 6$$

$$2 + 7b = 1 \quad \Longrightarrow \quad 7b = 1 - 2 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{7}$$

Los valores de las constantes son: $a = 6, b = -\frac{1}{7}$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Determinar si el intervalo $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ se encuentra contenido en el conjunto de negatividad del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ si se sabe que $x = 1$ es raíz del polinomio.

Justificar la respuesta.

Resolución:

Como $x = 1$ es raíz de del polinomio, podemos aplicar Ruffini para dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - 1)$

	1	- 2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

Entonces:

$$P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

Calculamos las raíces de la expresión cuadrática para expresarla en forma factorizada.

La fórmula de cálculo es

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema tenemos que $a = 1,\ b = -1, c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

Entonces,

$$(x^2 - x - 2) = (x-2) \cdot \big(x-(-1)\big) = (x-2) \cdot (x+1)$$

Finalmente

$$P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+1)$$

donde $x = 1, x_1 = 2, x_2 = -1$ son las raíces del polinomio P.

Aplicando la consecuencia del Teorema de Bolzano, analizamos el signo del polinomio en cada uno de los intervalos determinados por sus raíces. Para esto elegimos un punto en cada uno de los intervalos y vemos cual es el valor del polinomio.

Intervalo	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	(1;2)	(2; +∞)
Valor del polinomio en un elemento del intervalo	$P(-2) < 0$	$P(-2) > 0$	$P(1{,}5) < 0$	$P(3) > 0$
Signo del polinomio	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

C^- = $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$

El intervalo $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **no se encuentra** contenido en el intervalo de negatividad del polinomio. Por lo tanto, el signo del polinomio en dicho intervalo no puede ser negativo.