14/06/2023

TEMA 9

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	**2**	**3**	**4**
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Calcular la siguiente integral $\int \left(\frac{2x+2}{3x^2+6x}\right) dx =$

Para resolver estos ejercicios se tendrán en cuenta los temas abordados durante todo el cuatrimestre: Funciones-Operaciones con polinomios- Integrales inmediatas- Integrales por sustitución.

Para resolver esta integral primero podemos sacar un factor común en el denominador:

$$\int \frac{2x+2}{3\cdot(x^2+2x)}\,dx =$$

Como la derivada de la expresión x^2+2x es la expresión que tenemos en el numerador, entonces podemos plantear una sustitución:

$$u = x^2+2x$$

$$du = 2x+2\ \ dx$$

Realizando la sustitución correspondiente, queda:

$$\int \frac{2x+2}{3\cdot(x^2+2x)}\,dx = \int \frac{du}{3\cdot u}$$

$$\int \frac{2x+2}{3\cdot(x^2+2x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{2x+2}{3\cdot(x^2+2x)}\,dx = \frac{1}{3}\,ln|u| + C$$

Sustituyendo nuevamente a u por x^2+2x, queda:

$$\int \frac{2x+2}{3\cdot(x^2+2x)}\,dx = \frac{1}{3}\,ln|x^2+2x| + C$$

2. La recta tangente al gráfico de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el punto $\boldsymbol{(2; f(2))}$ es $\boldsymbol{y = -3x + 2}$. Determinar el valor de $\boldsymbol{f(2)}$ y $\boldsymbol{f\,'(2)}$.

Sabemos que una de las características de la recta tangente a una función en el punto dado es que dicho punto pertenezca a la función y a la recta, por lo tanto, podemos hallar $f(2)$ utilizando a $y = -3x + 2$. Con lo cual:

$$y = -3.2 + 2$$

$$y = -4 \to f(2) = -4$$

Por otra parte, sabemos por definición de recta tangente que: $f'(x_0) = m$

Por lo tanto: $f'(2) = -3$.

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de derivadas y recta tangente.

3. Comprobar que la función $f(x) = e^{-x^2+3x}$ alcanza un máximo absoluto en el intervalo $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

La función f está definida para todo número real por lo que $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Buscamos la derivada:

$$f'(x) = e^{-x^2+3x} \,.\, (-x^2 + 3x)'$$

$$f'(x) = e^{-x^2+3x}.(-2x + 3)$$

El dominio de la derivada es también el conjunto de los números reales.

Igualamos a cero la derivada para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$e^{-x^2+3x}.(-2x + 3) = 0$$

De donde es: $-2x + 3 = 0$

Luego, el punto crítico es igual a $x = \frac{3}{2}$.

Recordemos que:

• si $f'(x) > 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es creciente en el intervalo $(a;\ b)$

• si $f'(x) < 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es decreciente en el intervalo $(a;\ b)$.

Analizamos qué sucede con los intervalos $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ y $(\frac{3}{2};\ +\infty)$

Intervalo	$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$
Para	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de f'	$f'(x) = 6{,}98 > 0$	$f'(x) = -7{,}39 < 0$
Conclusión	f crece en $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$	f decrece en $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

- En $x = \frac{3}{2}$ la derivada pasa de positiva a negativa por lo que la función alcanza un máximo en el intervalo $[\frac{1}{2}; 2]$ y es $Máx = \left(\frac{3}{2}; e^{9/4}\right)$.

4. Sabiendo que $\boldsymbol{f(-1)=3}$, que $\boldsymbol{f'(-1)=\ 2}$, hallar la derivada de $\boldsymbol{g(x)}$ en $\boldsymbol{x=-1}$, siendo $\boldsymbol{g(x)=3x.f(x)}$.

Hallar la derivada de $\boldsymbol{g(x)}$ en $\boldsymbol{x=-1}$ significa calcular el valor de $\boldsymbol{g'(-1)}$.

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{g(x)=3x.f(x)}$, hallamos su derivada utilizando la regla de derivación para el producto de funciones:

$$\boldsymbol{g'(x)=3.f(x)+3x.f'(x)}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{g'(-1)=3.f(-1)+3.(-1).f'(-1)}$$

Reemplazando con la información dada en el enunciado:

$$\boldsymbol{g'(-1)=3.3+3.(-1).2 \Rightarrow g'(-1)=3}$$