MATEMÁTICA (51) Cátedra A: NUÑEZ, MYRIAM
2° PARCIAL

.UBA XXI

16/11/2022

TEMA 8

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2,50	0,50	0,50	2	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. Hallar los puntos del gráfico de la función $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$ para los cuales la pendiente de la recta tangente es 10.

Recordemos que:

> Llamamos ***recta tangente al grafico de una función en el punto (a; f(a))*** a la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es ***f' (a)***

(Ver el material de estudio titulado "Derivadas" que se incluye en el campus dentro de la sesión 10)

Luego, debemos determinar para qué valores de $a \in \Re$ resulta $f'(a) = 10$

Siendo $f'(x) = 3x^2 - 24x - 17$ **(consultar reglas de derivación en pág. 11 del apunte sobre derivadas referido previamente)** resulta directamente:

$$f'(a) = 3a^2 - 24a - 17 \ \rightarrow 3a^2 - 24a - 17 = 10 \rightarrow 3a^2 - 24a - 27 = 0 \rightarrow a_1 = -1 \ \ y \ a_2 = 9$$

Entonces, los puntos buscados son de la forma $P_1 = (-1; f(-1))$ y $P_2 = (9; f(9))$ donde, además:

$f(-1) = 5 \ y \ f(9) = -395$ por lo que, finalmente: $P_1 = (-1; 5)$ y $P_2 = (9; -395)$

2. La $\int e^{\frac{4}{x}} . x^{-2} \ dx$ tiene por familia de primitivas a:

a) $F(\mathrm{x}) = -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{x}} + C$

b) $F(\mathrm{x}) = -\frac{1}{4} e^{\frac{4}{x}} + C$ **CORRECTA**

c) $F(x) = -\frac{1}{4} e^{x} + C$

d) $F(x) = \frac{1}{4} e^{x} + C$

En principio, recordemos qué se entiende por primitiva de una función, de acuerdo con la información proporcionada en el **material de estudio titulado "Integrales" correspondiente a la sesión 12:**

> Si para todos los puntos de un intervalo real $[a, b]$ se verifica que $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ sobre dicho intervalo.

Además:

> Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x)+k$ se denomina ***integral indefinida*** de la función $f(x)$.

Luego, para encontrar la familia de primitivas planteada, debemos obtener $\int e^{\frac{4}{x}}.x^{-2}\ dx$

Como podemos apreciar fácilmente, no podemos utilizar ninguna de las propiedades de integración ni la tabla de primitivas inmediatas como único recurso para calcular dicha integral, sino que es necesario recurrir a alguno de **los métodos de integración que se explican en el apunte titulado bajo el mismo nombre dentro de la sesión 12.**

Ahora bien, ¿qué método elegir? Si tomamos en cuenta que la derivada del exponente del primer factor, es decir, $\left(\frac{4}{x}\right)'$ es igual a $-\frac{4}{x^2} = -4x^{-2}$ y justamente x^{-2} es el segundo de los factores del integrando, nos conviene pensar en la siguiente sustitución:

Si llamamos $u = \frac{4}{x}$ $\quad\rightarrow\quad du = -4x^{-2}\,dx \quad\rightarrow\quad -\frac{1}{4}\,du = x^{-2}\,dx$

Entonces: $\int e^{\frac{4}{x}}.x^{-2}\ dx = -\frac{1}{4}\int e^u\,du$

Ahora bien, siendo que $-\frac{1}{4}\int e^u\,du = -\frac{1}{4}\,e^u + C$ **(revisar tabla de primitivas inmediatas)** volviendo atrás la sustitución resulta finalmente:

$$\int e^{\frac{4}{x}}.x^{-2}\ dx = -\frac{1}{4}\,e^{\frac{4}{x}} + C$$

3. El área de la región del plano limitada por las funciones $f(x) = 3x+1$ y $g(x) = -x^2+2x+7$, se obtiene calculando:

a) $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx$

b) $\int_2^3 [g(x) - f(x)]dx$

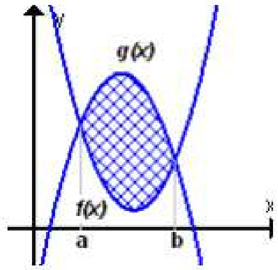
c) $\int_{-3}^2 [g(x) - f(x)]dx$ **CORRECTA**

d) $\int_{-3}^2 [f(x) - g(x)]dx$

En primer lugar, recordemos que:

El cálculo del área de un recinto limitado por dos curvas como las que muestra la figura puede pensarse como la diferencia de dos áreas.
La primera corresponde al área del recinto limitado por la curva que está por encima (*y=g(x)*), el eje *x* y las rectas *x = a*, *x = b* y la segunda es el área del recinto limitado por la curva que está por debajo (*y=f(x)*), el eje *x* y las rectas *x = a*, *x = b*.

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$



(Ver el material de estudio titulado "Cálculo de área" que se incluye en el campus dentro de la sesión 12)

Luego, para responder a la consigna planteada, debemos determinar-en principio- las abscisas de los puntos de intersección entre ambas curvas, como sigue:

$$3x + 1 = -x^2 + 2x + 7 \rightarrow \; x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = -3 \;\; y \; x_2 = 2$$

Por último, debemos analizar dentro del intervalo $[-3; 2]$ cuál de las curvas está "por encima" y cuál "por debajo", para lo cual siendo que ambas funciones son continuas en dicho intervalo, alcanza con evaluar cada una de las expresiones que las definen en algún valor intermedio del mismo, por ejemplo, en 0 que simplifica notablemente los cálculos:

- $f(0) = 3.0 + 1 = 1$
- $g(0) = -0^2 + 2.0 + 7 = 7$

Como $g(0) > f(0)$ por lo expuesto anteriormente podemos afirmar que para todo valor de x en el intervalo dado será $g(x) > f(x)$ por lo que el área buscada se calcula a partir de: $\int_{-3}^{2} [g(x) - f(x)]dx$

4. Determinar el valor de $m \in \mathbb{R}$, para que la función $f(x) = \log(x - m + 4)$ corte al eje x en -2.

Primeramente, si $f(x)$ corta al eje x en -2, entonces -2 es raíz de f y por lo tanto $f(-2) = 0$
Luego, debe ser $\log(-2 - m + 4) = 0 \rightarrow \log(2 - m) = 0$
Ahora bien, ¿bajo qué condición el logaritmo, cualquiera sea su base, nos devuelve como resultado cero?
Esta y otras características de las funciones logarítmicas las pueden encontrar en la **pág. 2 del apunte teórico titulado "Funciones exponencial y logarítmica", dentro de la sesión 9.**
Allí se expone que la única posibilidad de que esto ocurra es que el argumento del logaritmo en cuestión valga 1, es decir, en este caso sólo cuando $2 - m = 1$ y, por lo tanto, $m = 1$.

5. Dada $f(x) = 3^{3x-1} - 243$, indicar entre las siguientes opciones los puntos en que el gráfico interseca los ejes cartesianos.

a) $(3\,;0)\;y\;(0\,;\;0)$

b) $(2\,;0)\;y\;\left(0\,;\;-\frac{728}{3}\right)$ **CORRECTA**

c) Solo corta al eje x en $(3\,;0)$

d) La gráfica no corta a ninguno de los ejes coordenados.

Comencemos obteniendo la intersección entre el gráfico de f y el eje horizontal (eje "x").

Para ello, debemos plantear $f(x) = 0$ pues cualquier punto sobre el eje horizontal tiene segunda coordenada 0.

Entonces: $f(x) = 0 \rightarrow 3^{3x-1} - 243 = 0 \rightarrow 3^{3x-1} = 243$

Ahora bien, siendo que $343 = 3^5$, planteamos en forma equivalente $3^{3x-1} = 3^5$

Podemos ver que la última igualdad sólo resulta válida si $3x - 1 = 5$, de donde finalmente $x = 2$ **(ver ejemplo 2b del apunte teórico "Funciones exponencial y logarítmica" que se incluye en la sesión 9).**

Luego, el punto en que el gráfico de f interseca al eje horizontal es el (2;0).

Por último, para obtener la intersección entre el gráfico de f y el eje vertical (eje "y") debemos buscar cuánto vale $f(0)$, ya que cualquier punto sobre el eje vertical tiene primera coordenada 0.

Entonces, $f(0) = 3^{3.0-1} - 243 \rightarrow f(0) = \frac{1}{3} - 243 \rightarrow f(0) = -\frac{728}{3}$

Por lo tanto, el punto en que el gráfico de f interseca al eje vertical es el (0; $-\frac{728}{3}$).

6. $\int x^2\sqrt{x^3+3}\,dx$ es igual a:

a) $\frac{2}{3}(x^3+3)^{3/2} + c$

b) $2(x^3+3)^{-1/2} + c$

c) $\frac{2}{9}(x^3+3)^{3/2} + c$ **CORRECTA**

d) $\frac{2}{9}(x^2+1)^{-3/2} + c$

En principio, es sencillo ver que no podemos utilizar ninguna de las propiedades de integración ni la tabla de primitivas inmediatas como único recurso para obtener la integral pedida, sino que es necesario recurrir a alguno de los **métodos de integración que se exponen en el apunte titulado bajo el mismo nombre dentro de la sesión 12.**

Si analizamos que la derivada del radicando, es decir, $(x^3+3)'$ es igual a $3x^2$ y justamente x^2 aparece multiplicando a la expresión radical, nos conviene pensar en la siguiente sustitución:

Si llamamos $u = x^3 + 3 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2\, dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}\, du = x^2\, dx$

Entonces: $\int x^2\sqrt{x^3+3}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\, du$

Ahora bien, siendo que $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, resulta $\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\, du$

Por otra parte, $\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ **(revisar tabla de primitivas inmediatas del apunte titulado "Integrales" dentro de la sesión 12).**

Luego, $\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$

Finalmente, volviendo atrás la sustitución efectuada, se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{x^3+3}\, dx = \frac{2}{9}(x^3+3)^{\frac{3}{2}} + C$$

7. La función $f(x) = x^4 - 8x^3$ alcanza un mínimo local en:

a) $x_0 = 6$ **CORRECTA**
b) $x_0 = 0\ ;\ x_1 = 6$
c) $x_0 = 8$
d) La función no alcanza mínimos locales

En primer lugar, conviene revisar las siguientes definiciones:

Puntos críticos

Si *f* es una función definida en *c*, y

- $f'(c) = 0$
- ó no existe la derivada en *c*

se dice que *c* es un punto crítico de *f*.

Criterio de la primera derivada

Sea c un punto crítico de una función continua en un intervalo (a; b) que contiene a c. Si f es derivable en ese intervalo, excepto quizás en c, entonces:

- Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de b y $f'(x) < 0$ a la derecha de b, entonces b es ***un máximo relativo*** de *f*.
- Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de b y $f'(x) > 0$ a la derecha de b, entonces b es un ***mínimo relativo de f.***

(Ver el material de estudio titulado "Estudio de funciones" que se incluye en el campus dentro de la sesión 11)

En este caso particular, siendo que $f'(x)$ está definida para todo número real por ser f una función polinómica, los únicos puntos críticos serán los "x_0" tales que $f'(x_0) = 0$

Luego, planteamos:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 24x^2$$

(Ante cualquier duda sobre el mecanismo de derivación consultar las reglas de derivación expuestas en la pág. 11 del apunte "Derivadas" de la sesión 10).

Entonces, $f'(x_0) = 0 \rightarrow 4{x_0}^3 - 24{x_0}^2 = 0 \rightarrow 4{x_0}^2 \cdot (x_0 - 6) = 0 \rightarrow x_0 = 0 \;\, o \; x_0 = 6$

Nos resta analizar si en cada uno de los valores de x_0 hallados se presenta un máximo local, un mínimo local (o ninguno de los anteriores) a partir del criterio de la primera derivada referido al inicio:

Intervalo	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 6)$	6	$(6; +\infty)$
Signo de f'	-		-		+

Finalmente, siendo que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x_0 = 6$ y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x_0 = 6$, concluimos que f alcanza un mínimo local en $x_0 = 6$

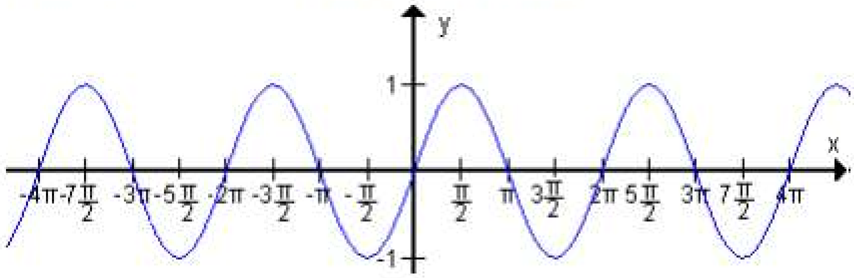
Por otra parte, como f' no cambia de signo en torno a $x_0 = 0$ (es siempre negativa) decimos que f no presenta allí ni máximo ni mínimo local.

8. ¿Cuál opción representa al conjunto imagen de la función $g(x) = \text{sen}\, x + 3$?

a) $[-1; 1]$
b) $[-4; -2]$
c) $[-\pi; \pi]$
d) $[2; 4]$ **CORRECTA**

Analicemos en un primer momento el conjunto imagen de la función base $f(x) = sen\ x$:

f(x) = sen x Vamos a analizar la función seno a partir de su gráfica:



- Como los valores de senx corresponden a las ordenadas de los puntos de una circunferencia de radio 1, se verifica que -1 ≤ senx ≤ 1. Por lo tanto la imagen es el intervalo [-1; 1]: Im(senx) = [-1; 1]:

(Ver el material de estudio titulado "Funciones trigonométricas 2" que se incluye en el campus dentro de la sesión 8)

Ahora bien, la función que se nos propone no es exactamente $f(x) = sen\ x$ sino $g(x) = sen\ x + \mathbf{3}$

Podemos preguntarnos en este paso, ¿qué efecto produce ese "+3" que adicionamos a la función base sobre el gráfico de la nueva función?

Volvamos sobre el apunte teórico referido previamente:

f(x) = senx + k ***f(x) = cosx + k***	Al igual que en otros casos, al sumarle una constante k, la función se desplaza verticalmente |k| unidades. Es de prever que al hacerlo, se modifiquen al menos, el conjunto de imágenes y los ceros de la función.

Luego, sabemos que el conjunto imagen de la función g no será el mismo que el de la función base f puesto que el "+3" genera un desplazamiento vertical de su gráfico 3 unidades hacia arriba. Para determinarlo, procedemos entonces de la siguiente manera:

Sabemos que $-1 \leq sen\ x \leq 1$, entonces, $-1 + \mathbf{3} \leq sen\ x + \mathbf{3} \leq 1 + \mathbf{3}$

Es decir, $2 \leq sen\ x + 3 \leq 4$ por lo que el conjunto imagen de la función g está representado por el intervalo $[2; 4]$

9. Dados los vectores en $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = 2\vec{\imath} + m\vec{\jmath}$ y $\vec{b} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ de manera que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ resulten perpendiculares. Luego de hallar el valor de m, hallar el módulo de la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En primera instancia, comencemos pensando que dos vectores perpendiculares forman entre ellos un ángulo recto y en ese caso particular, el producto escalar entre dichos vectores asume un valor muy especial, como se enuncia en la siguiente propiedad:

- Si los vectores forman un ángulo recto, el producto escalar es cero.

(Ver el material de estudio titulado "Vectores en R2" que se incluye en el campus dentro de la sesión 13)

Luego, debemos plantear el producto escalar entre ambos vectores e igualarlo a cero.

¿Cómo se calcula el producto escalar? Recordemos la definición que se da en el apunte referido previamente:

Consideremos los vectores $\vec{u} = (a\,;b)$ y $\vec{v} = (c\,;d)$, el producto escalar

$$\vec{u}\,.\vec{v} = a.c + b.d$$

Entonces, dados $\vec{a} = 2\vec{\imath} + m\,\vec{\jmath} = (2; m)$ y $\vec{b} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = (-1; -2)$ resulta:

$$\vec{a}.\vec{b} = 2.(-1) + m.(-2) = -2 - 2m$$

Por lo que: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \rightarrow -2 - 2m = 0 \rightarrow -2 = 2m \rightarrow m = -1$

En una segunda parte del ejercicio, se pide determinar el módulo de la suma entre ambos vectores, para lo cual debemos tener presente cómo obtener efectivamente el vector suma entre dos vectores y de qué manera calcular el módulo de un vector cualquiera.

Volvamos una vez más al apunte de cátedra correspondiente:

La **suma de dos vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ definidos en forma cartesiana es otro vector, cuyas coordenadas son las sumas de sus respectivas coordenadas. Es decir:

Si $\vec{u} = (a\,; b)$ y $\vec{v} = (c\,; d)$ *entonces* $\vec{u} + \vec{v} = (a + c\,; b + d)$

Si $A = (a\,; b)$ y $B = (c\,; d)$ entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$, donde $|\overrightarrow{AB}|$ es el **módulo del vector** $\overrightarrow{A\,B}$

En nuestro caso particular, resulta:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2; -1) + (-1; -2) \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (1; -3)$$

Y $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$