APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. **Hallar el dominio de $t(x) = \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$**

La función t es una función logarítmica, por lo tanto la primera condición que tenemos que analizar es que su argumento debe ser mayor que $\mathbf{0}$.

Esto significa que:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0$$

Al analizar esta expresión vemos que como el numerador no es $\mathbf{0}$, el cociente nunca será $\mathbf{0}$; además su denominador siempre será positivo, por lo tanto el cociente siempre será mayor que $\mathbf{0}$.

Esto significa que el dominio de la función es: $\boldsymbol{Dom(t) = \mathbb{R}}$

2. Sea $f(x) = -4 + 8\sqrt{3x-2}$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente al gráfico de una función tiene como pendiente la derivada de la función en dicho punto, por lo tanto lo primero que debemos determinar es la derivada de la función f.

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = 0 + 8.\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}.3 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{\sqrt{3x-2}}$$

Calculamos el valor de la derivada para $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{12}{\sqrt{3.1-2}} \Rightarrow f'(1) = 12$$

La pendiente de recta tangente a la gráfica de la función es 12.

Para determinar la ordenada al origen, averiguamos la ordenada del punto que pertenece a la gráfica con abscisa 1:

$$f(1) = -4 + 8\sqrt{3.1-2} \Rightarrow f(1) = -4 + 8 \Rightarrow f(1) = 4$$

Por lo tanto la recta pasa por el punto de coordenadas $(1; 4)$ y su pendiente es 12.

Reemplazando en la fórmula de la recta $y = mx + b$:

$$4 = 12.1 + b \Rightarrow -8 = b$$

La recta tangente es:

$$y = 12x - 8$$

3. ¿Para qué valor de x la función $f(x) = x^2\ (2 - x)^2$ alcanza un máximo relativo?

Para determinar los máximos y mínimos de una función es necesario determinar previamente su dominio. En este caso la función es una función polinómica por lo tanto: $\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R}$.

Luego debemos determinar los puntos críticos de la función, para lo cual debemos hallar su derivada. En este caso la función está expresada como un producto, por lo tanto debemos aplicar la regla de derivación correspondiente al producto de funciones y también la regla de la cadena.

$$\boldsymbol{f(x) = x^2\ (2 - x)^2 \ \Rightarrow f'(x) = 2x(2-x)^2 + x^2.2(2-x).(-1)}$$

Resolviendo y sacando factor común, nos queda:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x(2-x)^2 - 2x^2(2-x) \Rightarrow f'(x) = 2x(2-x)(2-x-x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x(2-x)(2-2x) \Rightarrow f'(x) = 4x(2-x)(1-x)}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de la función son: $\boldsymbol{x = 0\ \wedge x = 2\ \wedge x = 1}$

Analizamos los intervalos determinados en su dominio:

$(-\infty; \mathbf{0})$	$(\mathbf{0}; \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}; \mathbf{2})$	$(\mathbf{2}; +\infty)$
$\boldsymbol{x = -1}$ $\boldsymbol{f'(-1) < 0}$ ***La función es decreciente***	$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ $\boldsymbol{f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0}$ ***La función es creciente***	$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$ $\boldsymbol{f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0}$ ***La función es decreciente***	$\boldsymbol{x = 3}$ $\boldsymbol{f'(3) > 0}$ ***La función es creciente***

Por lo tanto:

La función f tiene un máximo relativo en $x = 1$.

4. Evaluar la siguiente integral $\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$

Para realizar la integral pedida, aplicamos la regla de Barrow. Primero buscamos una función primitiva, para lo cual efectuamos la integral indefinida:

$$\int \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{4} - 2\ln(x) + C$$

Elegimos la primitiva $F(x) = \frac{x^2}{4} - 2\ln(x)$ y aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{4} - 2\ln(x)\Big|_1^2 = \left(\frac{4}{4} - 2\ln(2)\right) - \left(\frac{1}{4} - 2\ln(1)\right) = 1 - 2\ln(2) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 2\ln(2)$$