16/11/2022

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2,50	0,50	0,50	2,50	0,50	0,50	0,50	0,50	2

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. Dados los vectores en $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + m\vec{j}$, hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ de manera que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ resulten perpendiculares. Luego de hallar el valor de m, hallar el módulo de la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Vectores en R2

Sabemos que dos vectores son perpendiculares sí su producto escalar es igual a cero. Trabajaremos con los vectores:

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} = (1; 2)$

$\vec{b} = -2\vec{i} + m\vec{j} = (-2; m)$

Realizamos el producto escalar entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b} = (1; 2).(-2; m)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = 1.(-2) + 2.m = 0$$ (Resolvemos la siguiente ecuación para obtener el valor de m)

$$1.(-2) + 2.m = 0$$

$$-2 + 2.m = 0$$

Sumamos miembro a miembro 2

$$-2 + 2 + 2.m = 0 + 2$$

Dividimos ambos miembros por 2

$$\frac{2}{2}.m = \frac{2}{2}$$

$$m = 1$$

Por lo tanto, el vector $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} = (-2; 1)$

Realizamos la suma de ambos vectores para luego hallar su módulo, recordando:

La **suma de dos vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ definidos en forma cartesiana es otro vector, cuyas coordenadas son las sumas de sus respectivas coordenadas. Es decir:

Si $\vec{u} = (a\,;b)$ y $\vec{v} = (c\,;d)$ *entonces* $\vec{u}+\vec{v} = (a+c\,;b+d)$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1;2)+(-2;1) =$$

$$= (1+(-2);2+1) \text{ Sumamos ambas componentes}$$

$$= (-1;3)$$

Obtenemos;

$$\vec{a}+\vec{b} = (-1;3)$$

Buscamos el módulo del vector suma:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

---

2. La función $f(x) = e^{4x-x^2}$ alcanza un máximo local en:

a) $x = 2$ **CORRECTA**

b) $x = 0$

c) $x = 4$

d) La función no alcanza máximos locales

Solución

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Derivada- Estudio de una función

Sea $f(x) = e^{4x-x^2}$ para hallar el máximo local en primer lugar debemos buscar la derivada de la función:

$$f(x) = e^{4x-x^2}$$

$$f'(x) = e^{4x-x^2}.(4x-x^2)'$$ (Derivada de la función exponencial-polinómica y derivada de la regla de la cadena)

$$f'(x) = e^{4x-x^2}.(4-2x)$$

Trabajando con el apunte de estudio de funciones, debemos igualar a la derivada de la función a cero:

$$0 = e^{4x-x^2}.(4-2x)$$

En una multiplicación para que el resultado sea cero alguno de los factores debe ser cero, sabemos que:

$$e^{4x-x^2} \neq 0$$

Por lo tanto:

$$4-2x = 0 \text{ (resolvemos la ecuación, hasta obtener el valor de x)}$$

Sumamos miembro a miembro -4

$$-4+4-2x = 0-4$$

$$2x = -4$$

Dividimos miembro a miembro por 2

$$\frac{2}{2}.x = -\frac{4}{2}$$

$x = -2$

En conclusión, la opción correcta es a)

---

3. ¿Cuál opción verifica que $\cos x = -\frac{1}{2}$ si $x \in [0; \pi]$?

a) $\left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{\frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$ **CORRECTA**

d) $\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Funciones Trigonométricas 2

Debemos hallar un valor x que pertenezca al intervalo $[0; \pi]$ y además verifique que su coseno sea menos 1/2 . Esto ocurre cuando x pertenece al segundo cuadrante.

Veamos que:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k\epsilon Z$$

Si damos valores a k, obtenemos:

Si $k = 0$ $x = \frac{2}{3}\pi$

Si $k = 1$ $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$ $no\ pertenece\ a\ [0; \pi]$

En consecuencia, la opción correcta es c)

4. Hallar el punto del gráfico de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$ para el cual la recta tangente tiene ecuación $y = 5x + 9$.

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Aplicaciones de la derivada 1- Aplicaciones de la derivada 2.

Para hallar el punto $(x; y)$ cuya recta tangente a f(x) tiene por ecuación la función lineal propuesta, es necesario trabajar con la derivada de $f(x)$.

Derivamos la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 10\ (derivada\ de\ una\ función\ polinómica)$$

Sabemos que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a dicha función, por lo tanto debemos igualar la derivada obtenida a 5 (pendiente de la función $y = 5x + 9$)

$5 = 3x^2 - 12x - 10$ (Resolvemos la ecuación de grado 2)

Restamos miembro a miembro 5:

$$-5+5=3x^2-12x-10-5$$

$$0=3x^2-12x-15$$

Aplicamos la fórmula de grado 2:

$$a=3 \qquad b=-12 \qquad c=-15$$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4.3.(-15)}}{2.3}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144+180}}{6}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{324}}{6}$$

$$x=\frac{12\pm 18}{6}$$

Por lo tanto,

$$x=\frac{12+18}{6}=5$$

$$x=\frac{12-18}{6}=-1$$

Analizamos ambas soluciones obtenidas para hallar el punto que cumpla con las condiciones propuestas:

$$f(x)=x^3-6x^2-10x+1$$

En $x=5$

$$f(5)=5^3-6.5^2-10.5+1=-74$$

La ecuación de la recta tangente debe verificar que el punto $(5;-174)$ pertenece a la función dada:

$$y=5x+9$$

$$-74=5.5+9$$

$$-74\neq 34$$

En $x=-1$

$$f(-1)=(-1)^3-6.(-1)^2-10.(-1)+1=4$$

La ecuación de la recta tangente debe verificar que el punto (-1;4) pertenece a la misma

$$y=5x+9$$

$$4=5.(-1)+9$$

$$4=-5+9$$

$$4=4$$

Verifica la igualdad propuesta. Por lo tanto, el punto que verifica la condición pedida es: (-1;4).

5. La familia $f(x)$ de primitivas de $h(x) = ln^2x$ es:

a) $f(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + C$
b) $f(x) = \frac{\ln^3(x)}{3} + C$
c) $f(x) = x\ln^2(x) - 2\ln(x) + C$
d) $f(x) = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + C$ **CORRECTA**

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Integrales- Tabla de integrales

Para calcular la primitiva de $h(x) = ln^2x$ utilizamos la definición:

Definición	Si para todos los puntos de un intervalo real $[a, b]$ se verifica que $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ sobre dicho intervalo.

$$F'(x) = ln^2x$$

Integramos ambas funciones:

$$f(x) = \int ln^2x\, dx$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u = ln^2x \qquad du = 2lnx.\frac{1}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

Utilizando la definición nos queda:

Consideremos la función producto w, donde $w(x) = u(x)\cdot v(x)$
Entonces:
$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$

$\int ln^2x\, dx = x.ln^2x - \int x.2.lnx.\frac{1}{x}\, dx$ (simplificando las expresiones)

$$\int ln^2x\, dx = x.ln^2x - 2\int lnx\, dx$$

Para resolver la integral obtenida, volvemos a aplicar el método de integración partes:

$$\int ln^2x\, dx = x.ln^2x - 2(x.lnx - \int dx)$$

$\int ln^2x\, dx = x.ln^2x - 2(x.lnx - x) + C$ Aplico propiedad distributiva

$\int ln^2x\, dx = x.ln^2x - 2x.lnx + 2x + C$ Sacamos factor común “x”

$$\int ln^2x\, dx = x.(ln^2x - 2.lnx + 2) + C$$

Por lo tanto, la opción correcta es d)

6. El área de la región del plano limitada por las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = 3x^2 - 2$, se obtiene calculando:

a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{1}[f(x) - g(x)]dx$ **CORRECTA**

b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{1}[g(x) - f(x)]dx$

c) $\int_{0}^{1}[f(x) - g(x)]dx$

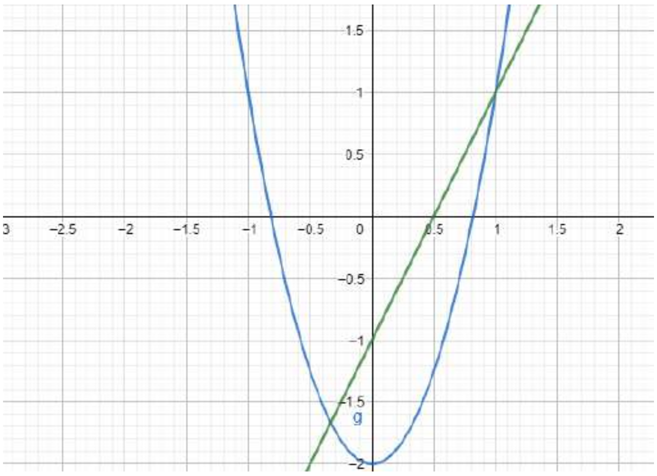
d) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}[f(x) - g(x)]dx$

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Funciones- Función Lineal- Función cuadrática- integrales definidas- Cálculo de área.

Sean las funciones: $f(x) = 2x - 1$ (Función lineal) y $g(x) = 3x^2 - 2$ (Función cuadrática)

Sabemos que ambas funciones tienen intersección en dos valores, como muestra el gráfico.



Para hallar la intersección entre ambas funciones debemos igualarlas, de este modo encontraremos los extremos para resolver el área bajo la curva.

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \ (Resolvemos\ la\ ecuación\ de\ grado\ 2)$$

$$3x^2 - 2x - 2 + 1 = 0 \ (igualamos\ la\ ecuación\ a\ cero)$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ (Aplicamos la fórmula de grado 2)}$$

$$a = 3 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.3.(-1)}}{2.3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{2 + 4}{6} = 1 \qquad\qquad x_2 = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$$

Dichos valores son los extremos bajo la curva.

Ahora que se conocen los extremos del área bajo la curva, utilizando el Teorema de Barrow y analizando el gráfico determinamos que: f(x) es nuestro techo y g(x) nuestro piso. Por lo tanto,

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} [f(x) - g(x)]dx$$

La opción correcta es la a)

7. Dada $f(x) = 2^{3x-1} - 64$, indicar entre las siguientes opciones los puntos en que el gráfico interseca a los ejes cartesianos.

a) $\left(\frac{7}{3};0\right)\ y\ \left(0;-\frac{127}{2}\right)$ CORRECTA
b) $\left(\frac{7}{3};0\right)\ y\ (0;0)$
c) Solo corta al eje x en $\left(\frac{7}{3};0\right)$
d) La gráfica no corta a ninguno de los ejes coordenados.

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Funciones- Función exponencial y logarítmica.

Cuando nos referimos a los puntos que interseca la función a los ejes, hacemos referencia a la raíz y la ordenada al origen respectivamente.

Sabemos que para calcular la raíz $y = 0$, por lo tanto:

$0 = 2^{3x-1} - 64$ (resolvemos la ecuación)

Sumamos 64 en ambos miembros:

$$0 + 64 = 2^{3x-1} - 64 + 64$$

$$64 = 2^{3x-1} \quad (64 = 2^6)$$

$$2^6 = 2^{3x-1}$$

$$6 = 3x - 1$$

Sumamos en ambos miembros 1:

$$6 + 1 = 3x - 1 + 1$$

$$7 = 3x$$

Dividimos ambos miembros por 3

$$\frac{7}{3} = \frac{3}{3}.x$$

$$\frac{7}{3} = x$$

El punto de intersección con el eje x es: $(\frac{7}{3}; 0)$

Para calcular la ordenada al origen; $x = 0$

$$y = 2^{3.0-1} - 64$$

$$y = 2^{-1} - 64 = \frac{1}{2} - 64 = -\frac{127}{2}$$

El punto de intersección con el eje y es: $(-\frac{127}{2}; 0)$ Por lo tanto la opción correcta es a)

---

8. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **es igual a**:

a) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

b) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$ **CORRECTA**

c) $\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} + c$

d) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{-3/2} + c$

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Integrales- Métodos de integración.

Para trabajar con $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$, aplicamos el método de integración por sustitución:

$$t = x^2 + 1 \text{ (sustitución 1)}$$

Derivamos ambos miembros:

$$dt = 2x\,dx$$

$$\frac{dt}{2} = x\,dx$$

Volvemos a nuestra integral para realizar la sustitución correspondiente:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$

Veamos que $\sqrt{t} = t^{1/2}$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{2}.\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.t^{\frac{3}{2}} + C$$

Volvemos reemplazar por sustitución 1.

$$\frac{1}{3}.(x^2+1)^{3/2} + C$$

La opción correcta es la b)

---

9. Determinar el valor de $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$, para que la función $\boldsymbol{f(x) = \log(x + m + 2)}$ corte al eje $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{3}$.

Solución:

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver los apuntes: Funciones- Función exponencial y logarítmica.

Sabemos que cuando una función corta al eje de x, estamos trabajando con la raíz o cero de la misma. En consecuencia, el valor de $y = 0$

Por lo tanto, trabajaremos con el punto $(3; 0)$:

$$0 = \log(3 + m + 2)$$

$$0 = \log(5 + m)$$

Para resolver la ecuación logarítmica aplicamos la definición de logaritmo: $\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$

$$10^0 = 5 + m$$

$1 = 5 + m$ (restamos miembro a miembro 5)

$$1 - 5 = 5 - 5 + m$$

$$\boldsymbol{-4 = m}$$