APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. La recta tangente al gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(-1; f(-1))$ es perpendicular a la recta $y = -2x + 1$, pasa por el origen de coordenadas. Determinar el valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$.

Para poder hallar $f(-1)$ y $f'(-1)$, primero debemos encontrar la recta tangente a la función con los datos dados. Es decir, debemos hallar la recta $y = mx + b$

Sabemos que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas, como la pendiente de la recta dada es -2, entonces $m = \frac{1}{2}$. Por lo tanto:$y = \frac{1}{2}x + b$

Asimismo, dicha recta pasa por el origen de coordenadas, es decir el $(0;0)$ por lo tanto $b = 0$. Entonces:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

Por otra parte, una de las características de la recta tangente a una función en el punto dado es que dicho punto pertenezca a la función y a la recta, por lo tanto, podemos hallar $f(-1)$ utilizando a $y = \frac{1}{2}x$. Con lo cual:

$$y = \frac{1}{2}.(-1)$$

$$y = -\frac{1}{2} \rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Por otra parte, sabemos por definición de recta tangente que: $f'(x_0) = m$

Por lo tanto: $f'(-1) = \frac{1}{2}$.

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de derivadas y recta tangente.

2. Sea la función $\boldsymbol{h(x) = \ln\left(e^{5-3x}\right)}$. Encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{h(x) = \ln 10}$.

Resolvemos la igualdad $h(x) = \ln 10$ para encontrar el valor de x buscado.

$$h(x) = \ln 10$$

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

Como $\ln(e^{y}) = y$ para todo y, tenemos que $\ln(e^{5-3x}) = 5 - 3x$. Luego,

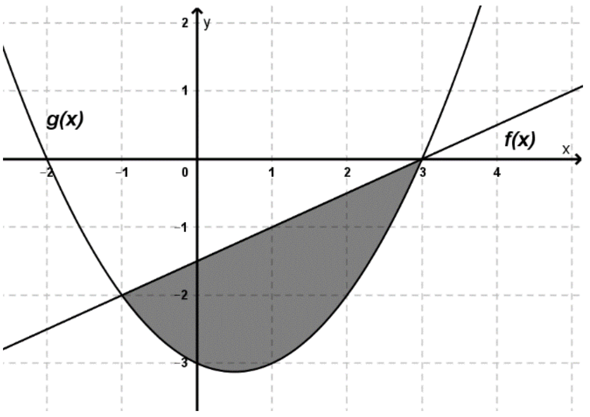
$$5 - 3x = \ln 10$$

$$x = \frac{5 - \ln 10}{3}$$

3. Calcular el área de la región sombreada, sabiendo que:

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$$



El área de la región que se pide calcular es la comprendida por la función $g(x)$ y $f(x)$, entre x=-1 y x=3. En el gráfico se puede observar que $f(x)$ representa el "techo" de la misma, mientras que $g(x)$ el "piso". Por lo tanto, sabemos que:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)dx$$

$$A = \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right)dx = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}dx$$

Integrando y aplicando la regla de Barrow:

$$A = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}dx =$$

$$A = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2\,dx + \int_{-1}^{3} x\,dx + \int_{-1}^{3} \frac{3}{2}dx \qquad (Por\ prop.\ \int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx)$$

$$A = -\frac{1}{2}.\int_{-1}^{3} x^2dx + \int_{-1}^{3} x\,dx + \int_{-1}^{3} \frac{3}{2}dx \qquad (Por\ \text{prop.}\ \int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)\,dx)$$

$$A = -\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\Big|_{-1}^{\mathbf{3}} = -\frac{1}{6}.x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\Big|_{-1}^{\mathbf{3}} =$$

$$A = -\frac{1}{6}.3^3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}.\,3 - \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}.(-\mathbf{1})^3 + \frac{(-\mathbf{1})^2}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.(-\mathbf{1})\right) =$$

$$A = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$A = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$A = \frac{16}{3}$$

4. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{x-1}}$

Sea $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

Como no se puede dividir por cero, el dominio de la función f es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Buscamos la derivada y su dominio:

$$f'(x)=\frac{2x\,.\,(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$Dom(f')=\mathbb{R}-\{1\}$$

Hallamos los puntos críticos, buscando los ceros de la derivada:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

Por lo tanto, los puntos críticos son: $x=0\ y\ x=2$

La recta $x=1$ es una asíntota vertical de la función y de su derivada. Lo tenemos en cuenta al considerar los intervalos donde estudiamos el signo de la derivada.

Recordemos que:

- si $f'(x)>0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es creciente en el intervalo $(a;\ b)$
- si $f'(x)<0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es decreciente en el intervalo $(a;\ b)$.

Analizamos entonces, los intervalos: $(-\infty;0),(0;1),(1;2),(2;\ +\infty)$.

Realizamos una tabla:

Intervalo	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
Para	$x=-1$	$x=\frac{1}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$x=3$
Signo de f'	$f'(x)=\frac{3}{4}>0$	$f'(x)=-3<0$	$f'(x)=-3<0$	$f'(x)=\frac{3}{4}>0$
Conclusión	f crece en $(-\infty;0)$	f decrece en $(0;1)$	f decrece en $(1;2)$	f crece en $(2;\infty)$

Concluimos:

$f'(x)>0\ en\ (-\infty;0)\ \cup\ (2;\infty)$ por lo que f es creciente en $(-\infty;0)\ \cup\ (2;\infty)$.

$f'(x)<0\ en\ (0;1)\ \cup\ (1;2)$ por lo que f es decreciente en $(0;1)\ \cup\ (1;2)$.