APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	**2**	**3**	**4**
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar $f^{-1}(x)$, $a \in \mathbb{R}$; si $f(x) = \frac{6a-x}{-2}$, se cumple: $f(2a) = f^{-1}(a+4)$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Función inversa

Para hallar la función inversa de $f(x)$, como nos dan de dato que $f(2a) = f^{-1}(a+4)$, basta con encontrar la imagen de $f(x)$, ya que la misma será el dominio de $f^{-1}(x)$.

Al despejar la "x" de la función f, y realizando un cambio de variables (intercambiamos a cada "y" por "x" y la "x" por "y"), lograremos encontrar dicha función inversa:

$$y = \frac{6a-x}{-2}$$

$$-2y = 6a - x$$

$$-2y - 6a = -x$$

$$x = 2y + 6a$$

Realizando el cambio de variables que mencionamos anteriormente, nos quedará:

$$y = 2x + 6a$$

Es decir que, la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = 2x + 6a$$

Como sabemos que $f(2a) = f^{-1}(a+4)$, si evaluamos en cada miembro de la igualdad y luego despejamos, podremos obtener "a" y por lo tanto la función inversa pedida:

$$f^{-1}(a+4) = 2.(a+4) + 6a$$

$$f^{-1}(a+4) = 2a + 8 + 6a$$

$$f^{-1}(a+4) = 8a + 8$$

$$f(x) = \frac{6a - x}{-2}$$

$$f(2a) = \frac{6a - 2a}{-2}$$

$$f(2a) = \frac{4a}{-2}$$

$$f(2a) = -2a$$

Es decir que:

$f^{-1}(a+4) = f(2a)$, entonces $8a + 8 = -2a$

$$8a + 2a = -8$$

$$10a = -8$$

$$a = -\frac{8}{10}$$

$$a = -\frac{4}{5}$$

Reemplazando en $f^{-1}(x) = 2x + 6a$, resultará:

$$f^{-1}(x) = 2x + 6.\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$f^{-1}(x) = 2x - \frac{24}{5}$$

2. Determinar los conjuntos C^+ y C^- de la función $f(x) = (x+1)^3.(x^2 - 2x + 3)$.

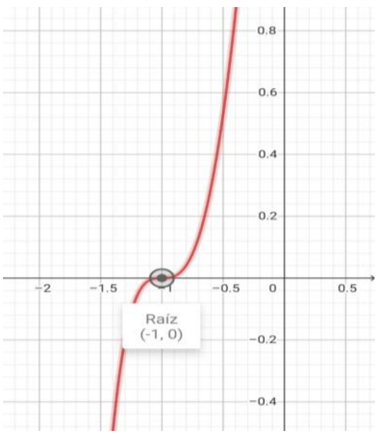
Solución:

Para resolver esta actividad se trabajarán los siguientes contenidos abordados durante el cuatrimestre: Números Reales- Ecuaciones e inecuaciones- intervalo- Funciones- Funciones cuadráticas- Funciones polinómicas -Estudio de una función.

Se denomina conjunto de positividad de la función al conjunto de valores del dominio para los cuales la función es positiva, lo mismo sucede con el conjunto de negatividad cuando la función es negativa.

Para determinar los conjuntos de positividad y negatividad de la función debemos analizar su comportamiento.

$$f(x) = (x+1)^3.(x^2 - 2x + 3)$$



Utilizando la gráfica de la función, se puede observar que la única raíz de la misma es el punto $(-1; 0)$, este valor se puede obtener de:

$$0 = (x+1)^3.(x^2 - 2x + 3)$$

Debemos recordar que el producto de dos expresiones sólo nos da cero cuando alguna de las expresiones lo es, por lo tanto:

$(x+1)^3 = 0 \quad \vee \qquad x^2 - 2x + 3 = 0 \; (aplicamos\ la\ fórmula\ de\ la\ recolvente)$

$x + 1 = \sqrt[3]{0} \qquad x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.3}}{2.1}$

$x = -1 \qquad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12 = -8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = No\ tiene\ raíces\ R$

Ahora bien, para determinar el conjunto de positividad la única expresión con raíz real debe ser mayor a cero.

$$(x+1)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -1 \quad \rightarrow C^+ = (-1; +\infty)$$

Lo mismo sucede con el conjunto de negatividad la expresión debe ser menor a cero

$$(x+1)^3 < 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 \quad \rightarrow C^- = (-\infty; -1)$$

3. Hallar los valores de $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ para que la función $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + x + c}$ se interseque con la función $\boldsymbol{g(x) = x^2 + x + 3}$.

Para hallar los puntos en de intersección de las funciones debemos plantear:

$$f(x) = g(x)$$

Luego, reemplazamos por las fórmulas de las funciones dadas en el enunciado y resulta que:

$$-x^2 + x + c = x^2 + x + 3$$

Despejamos y obtenemos que:

$$2x^2 + 3 - c = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4.2.(3 - c)}}{4}$$

Como las funciones deben intersecarse en un punto, la ecuación debe tener una única solución por lo que $-4.2.(3 - c)$ debe ser cero, es decir:

$$-4.2.(3 - c) = 0$$

Por lo tanto, para que este producto sea nulo $3 - c$ debe ser cero, entonces:

$$3 - c = 0 \leftrightarrow c = 3$$

Al resolver el ejercicio utilizamos los conceptos de función cuadrática y de ecuaciones cuadráticas.

4. Hallar el valor de c para que la función $f(x) = \frac{4}{x^2-12x+c}$ tenga una asíntota en $x = 8$.

Si la recta $x = 8$ es asíntota de la función significa que:

$$\lim_{x\to 8} f(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 8} \frac{4}{x^2 - 12x + c} = \infty$$

Como el numerador es 4, para que esto sea posible el denominador debe aproximarse a 0 cuando x se aproxima a 8.

Por lo tanto resolvemos la ecuación $x^2 - 12x + c = 0$ cuando $x = 8$.

$$8^2 - 12.8 + c = 0 \Longrightarrow 64 - 96 + c = 0 \Longrightarrow -32 + c = 0 \Longrightarrow c = 32$$

En este ejercicio trabajamos con la definición de Asíntota Vertical.