| | |
|---|---|
| APELLIDO: | CALIFICACIÓN: |
| NOMBRE: | |
| DNI (registrado en SIU Guaraní): | |
| E-MAIL: | DOCENTE (nombre y apellido): |
| TEL: | |
| AULA: | |

## Tabla de uso exclusivo para el docente

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| Puntaje de cada ejercicio | 2,50 | 2,50 | 2,50 | 2,50 |

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

**No se aceptarán respuestas en lápiz.**

**1. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-1}}$**

Sea $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Como no se puede dividir por cero, el dominio de la función f es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Buscamos la derivada y su dominio:

$$f'(x) = \frac{2x\,.\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$Dom(f') = \mathbb{R} - \{1\}$$

Hallamos los puntos críticos, buscando los ceros de la derivada:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

Por lo tanto, los puntos críticos son:

$$x = 0 \; y \; x = 2$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función y de su derivada. Lo tenemos en cuenta al considerar los intervalos donde estudiamos el signo de la derivada.

Recordemos que:

• si $f'(x) > 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\, b)$, entonces la función $f$ es creciente en el intervalo $(a;\, b)$

• si $f'(x) < 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función $f$ es decreciente en el intervalo $(a;\ b)$.

Analizamos entonces, los intervalos: $(-\infty; 0), (0; 1), (1; 2), (2;\ +\infty)$.

Realizamos una tabla:

| Intervalo | $(-\infty; 0)$ | $(0; 1)$ | $(1; 2)$ | $(2; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Para | $x = -1$ | $x = \frac{1}{2}$ | $x = \frac{3}{2}$ | $x = 3$ |
| Signo de f' | $f'(x) = \frac{3}{4} > 0$ | $f'(x) = -3 < 0$ | $f'(x) = -3 < 0$ | $f'(x) = \frac{3}{4} > 0$ |
| Conclusión | $f$ crece en $(-\infty; 0)$ | $f$ decrece en $(0; 1)$ | $f$ decrece en $(1; 2)$ | $f$ crece en $(2; \infty)$ |

Concluimos:

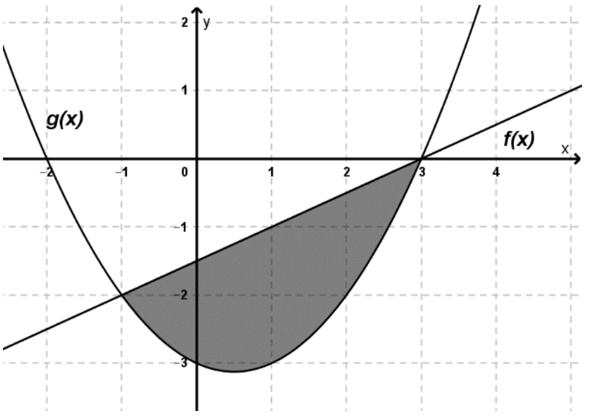
$f'(x) > 0\ en\ (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ por lo que f es creciente en $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ .

$f'(x) < 0\ en\ (0; 1) \cup (1; 2)$ por lo que f es decreciente en $(0; 1) \cup (1; 2)$ .

**2. Calcular el área de la región sombreada, sabiendo que:**

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$$




El área de la región que se pide calcular es la comprendida por la función $g(x)$ y $f(x)$, entre x=-1 y x=3. En el gráfico se puede observar que $f(x)$ representa el "techo" de la misma, mientras que $g(x)$ el "piso". Por lo tanto, sabemos que:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)dx$$

$$A = \int_{-1}^{3} f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right) dx = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}dx$$

Integrando y aplicando la regla de Barrow:

$$A = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}dx =$$

$$A = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2\, dx + \int_{-1}^{3} x\, dx + \int_{-1}^{3} \frac{3}{2}dx \qquad (Por\ prop.\ \int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx)$$

$$A = -\frac{1}{2}.\int_{-1}^{3} x^2 dx + \int_{-1}^{3} x\, dx + \int_{-1}^{3} \frac{3}{2}dx \qquad (Por\ \text{prop.}\ \int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)\, dx)$$

$$A = -\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \Big|_{-1}^{3} = -\frac{1}{6}.x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \Big|_{-1}^{3} =$$

$$A = -\frac{1}{6}.3^3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}.\ 3 - \left(-\frac{1}{6}.(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{3}{2}.(-1)\right) =$$

$$A = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$A = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$A = \frac{16}{3}$$

**3. Sea la función $h(x) = \ln\left(e^{5-3x}\right)$. Encontrar el valor de $x$ tal que $h(x) = \ln 10$.**

Resolvemos la igualdad $h(x) = \ln 10$ para encontrar el valor de x buscado.

$$h(x) = \ln 10$$

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

Como $\ln(e^{y}) = y$ para todo $y$, tenemos que $\ln(e^{5-3x}) = 5 - 3x$. Luego,

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$x = \frac{5 - \ln 10}{3}$$

4. La recta tangente al gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(-1; f(-1))$ es perpendicular a la recta $y = -2x + 1$, pasa por el origen de coordenadas. Determinar el valor de $f(-1)$ y $f´(-1)$.

Para poder hallar $f(-1)$ y $f´(-1)$, primero debemos encontrar la recta tangente a la función con los datos dados. Es decir, debemos hallar la recta $y = mx + b$

Sabemos que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas, como la pendiente de la recta dada es $-2$, entonces $m = \frac{1}{2}$. Por lo tanto:$y = \frac{1}{2}x + b$

Asimismo, dicha recta pasa por el origen de coordenadas, es decir el $(0; 0)$ por lo tanto $b = 0$. Entonces:

$$y = \frac{1}{2}x$$

Por otra parte, una de las características de la recta tangente a una función en el punto dado es que dicho punto pertenezca a la función y a la recta, por lo tanto, podemos hallar $f(-1)$ utilizando a $y = \frac{1}{2}x$. Con lo cual:

$$y = \frac{1}{2}.(-1)$$

$$y = -\frac{1}{2} \to f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Por otra parte, sabemos por definición de recta tangente que: $f'(x_0) = m$

Por lo tanto: $f´(-1) = \frac{1}{2}$.

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de derivadas y recta tangente.