Matemática

Clave de corrección primer parcial

Segundo turno – Tema 1 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar la ecuación y las coordenadas del vértice de la parábola que pasa por el punto $(-2;5)$ y cruza al eje x cuando $x=1$ y $x=3$.

La parábola tiene como raíces a $x=1$ y $x=3$, entonces podemos expresar la ecuación como

$$y = a(x-1)(x-3)$$

Para hallar el valor de la constante "a" usamos la información de que pasa por el punto $(-2;5)$:

$$5 = a(-2-1)(-2-3)$$

$$5 = a(-3)(-5)$$

$$5 = 15a \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{3}(x-1)(x-3) =$

Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_v = \frac{1}{3}(2-1)(2-3) = -\frac{1}{3}$$

$$Vértice = \left(2; -\frac{1}{3}\right)$$

Otra forma de hallar la coordenada "x" del vértice:

$$y = \frac{1}{3}(x-1)(x-3) = \frac{1}{3}(x^2-3x-x+3) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$$

$$x_v = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)}{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)} = 2$$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola.

Como pasa por los puntos $(-2;5)$, $(1;0)$ y $(3;0)$ tenemos que

$$0 = a(1)^2 + b(1) + c \quad \rightarrow \quad 0 = a + b + c$$

$$0 = a(3)^2 + b(3) + c \quad \rightarrow \quad 0 = 9a + 3b + c$$

$$5 = a(-2)^2 + b(-2) + c \quad \rightarrow \quad 5 = 4a - 2b + c$$

Llegamos a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$0 = a + b + c \qquad (1)$$

$$0 = 9a + 3b + c \qquad (2)$$

$$5 = 4a - 2b + c \qquad (3)$$

Despejamos c de la ecuación (1)

$$c = -a - b$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2) y despejando b

$$0 = 9a + 3b + (-a - b) \quad \rightarrow \quad 0 = 9a + 3b - a - b \quad \rightarrow 0 = 8a + 2b$$

$$\therefore \quad b = -4a$$

Como

$$c = -a - b \quad \rightarrow \quad c = -a - (-4a) \quad \therefore \quad c = 3a$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3)

$$5 = 4a - 2(-4a) + (3a)$$

$$5 = 4a + 8a + 3a \qquad \rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad b = -\frac{4}{3} \quad , \; c = 1$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$

Hallamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} = 2$$

$$y_v = \frac{1}{3}2^2 - \frac{4}{3}2 + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$Vértice = \left(2; -\frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Resolver la inecuación

$$\frac{2x-5}{x-1} \geq 1-x$$

y expresar el conjunto solución como intervalo o unión de intervalos.

Resolvemos la inecuación

$$\frac{2x-5}{x-1} \geq 1-x$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 + x \geq 0$$

$$\frac{2x-5-1(x-1)+x(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{2x-5-x+1+x^2-x}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2-4}{x-1} \geq 0$$

El cociente es un número mayor o igual a cero si:

- $\boldsymbol{x^2-4 \geq 0}$ **y** $\boldsymbol{x-1>0}$

  $x^2-4 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \geq 4 \quad \leftrightarrow \quad |x| \geq 2 \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

  $x-1>0 \quad \leftrightarrow \quad x>1 \quad \leftrightarrow \quad x \in (1; +\infty)$

  Como las dos condiciones deben satisfacerse simultáneamente:

  $x \in \{(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)\} \cap (1; +\infty) = [2; +\infty)$

- $\boldsymbol{x^2-4 \leq 0}$ **y** $\boldsymbol{x-1<0}$

  $x^2-4 \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq 4 \quad \leftrightarrow \quad |x| \leq 2 \quad \leftrightarrow \quad x \in [-2; 2]$

  $x-1<0 \quad \leftrightarrow \quad x<1 \quad \leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 1)$

  Como las dos condiciones deben satisfacerse simultáneamente:

  $x \in [-2; 2] \cap (-\infty; 1) = [-2; 1)$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es:

$$Solución = [-2; 1) \cup [2; +\infty)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2;-1)$ y es paralela a la recta $y=-3x+7$. La recta hallada, ¿pasa por el origen de coordenadas?

Sea $y=mx+b$ la ecuación de la recta que buscamos.
Por ser paralela a la recta $y=-3x+7$ sabemos que $m=-3$. Por otro lado, como pasa por el punto $(2;-1)$ tenemos que $-1=m(2)+b$.

Entonces:

$$m=-3$$

$$-1=2m+b \quad \leftrightarrow \quad -1=2\cdot(-3)+b \quad \leftrightarrow \quad b=5$$

La ecuación de la recta es

$$y=-3x+5$$

Para responder si pasa por el origen de coordenadas debemos verificar si pasa por el punto $(0;0)$. Pero cuando $x=0$ tenemos que $y=(-3)\cdot 0+5=5\neq 0$, la recta no pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{1}{3}x-2 \qquad g(x)=ax+11$$

hallar el valor de la constante $a\in\mathbb{R}$ si se sabe que $f^{-1}\circ g(1)=3$

En primer término hallamos la función inversa de $f(x)$.

Partiendo de $y=\frac{1}{3}x-2$ despejamos la expresión de x:

$$y+2=\frac{1}{3}x$$

$$3(y+2)=x$$

$$3y + 6 = x$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$f^{-1}(x) = 3x + 6$$

Hallamos ahora la expresión de la función $f^{-1} \circ g$

$$f^{-1} \circ g(x) = f^{-1}\big(g(x)\big) = 3(ax + 11) + 6 = 3ax + 33 + 6$$

$$f^{-1} \circ g(x) = 3ax + 39$$

$$f^{-1} \circ g(1) = 3$$

$$3a(1) + 39 = 3$$

$$3a = -36$$

$$a = -12$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $f^{-1} \circ g(1) = 3$ entonces $f(f^{-1} \circ g(1)) = f(3)$, pero como $f(f^{-1} \circ g(1)) = g(1)$ tenemos que

$$f(3) = g(1)$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3 - 2 = a \cdot (1) + 11$$

$$-1 = a + 11 \quad \rightarrow \quad a = -12$$