UBA Universidad de Buenos Aires

UBAXXI

Matemática

Clave de corrección primer parcial

Cuarto turno – Tema 1 - 24/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)
Determinar el valor de la constante $m \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación $|m + 2x| \leq 5$ sea el intervalo $[-1; 4]$

Resolvemos la inecuación:

$$|m + 2x| \leq 5$$

$$-5 \leq m + 2x \leq 5$$

$$-5 - m \leq 2x \leq 5 - m$$

$$\frac{-5 - m}{2} \leq x \leq \frac{5 - m}{2} \quad \rightarrow \quad x \in \left[\frac{-5 - m}{2}; \frac{5 - m}{2}\right]$$

Entonces $\left[\frac{-5-m}{2}; \frac{5-m}{2}\right] = [-1; 4]$

Para hallar el valor de la constante m planteamos que

$$\frac{-5 - m}{2} = -1 \quad \leftrightarrow \quad -5 - m = -2 \quad \leftrightarrow \quad m = -3$$

También se pudo haber planteado

$$\frac{5 - m}{2} = 4 \quad \leftrightarrow \quad 5 - m = 8 \quad \leftrightarrow \quad m = -3$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Hallar el conjunto imagen y el conjunto de negatividad de la función cuadrática

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

Para hallar el conjunto imagen buscamos las coordenadas del vértice.

La coordenada x del vértice es igual a:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$$y_v = 3x_v^2 + 3x_v - 6$$

$$y_v = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - 6 = -\frac{27}{4}$$

Dado que la constante que acompaña al término principal de la cuadrática es positiva el conjunto imagen es el intervalo $\left[-\frac{27}{4}; +\infty\right)$.

Para hallar el conjunto de negatividad de la cuadrática hallamos primero las raíces. Usando la fórmula resolvente llegamos a que sus raíces son:

$$x = -2 \quad ; \quad x = 1$$

Analizamos el signo de la cuadrática en los intervalos determinados por sus raíces:

- en el intervalo $(-\infty; -2)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = -4$ tenemos que $3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 6 = 48 - 12 - 6 = 30$
- en el intervalo $(-2; 1)$ el signo es negativo ya que si especializamos en $x = 0$ tenemos que $3 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (0) - 6 = -6$
- en el intervalo $(1; +\infty)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = 2$ tenemos que $3 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (2) - 6 = 12 + 6 - 6 = 12$

El conjunto de negatividad de la función es el intervalo $(-2; 1)$.

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = -2x + 2$ que pasa por el punto $P = (6; 3)$.

La ecuación de la recta que buscamos es de la forma $y = mx + b$.

Como es perpendicular a la recta de ecuación $y = -2x + 2$

$$m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Por otro lado, como pasa por el punto $(6; 3)$ tenemos que $3 = m(6) + b$.

Entonces:

$$m = \frac{1}{2}$$

$$3 = 6m + b \qquad \leftrightarrow \qquad 3 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + b \qquad \leftrightarrow \qquad b = 0$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x$

Para hallar la abscisa del punto donde se cruzan las rectas igualamos las ecuaciones que definen las rectas:

$$\frac{1}{2}x = -2x + 2$$

$$\frac{1}{2}x + 2x = 2 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{5}{2}x = 2 \qquad \rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

Para hallar la ordenada del punto evaluamos el valor hallado de la abscisa en cualquiera de las rectas:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

El punto donde se cruzan las rectas es el $\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dada la función $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$ hallar la expresión de f^{-1} y el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ que satisface $f^{-1}(1 - a) = 2$

En primer término hallamos la función inversa de f.

Partiendo de

$$y = \frac{2x - 3}{1 - x}$$

despejamos la expresión de x:

$$y(1 - x) = 2x - 3$$

$$y - xy = 2x - 3$$

$$-xy - 2x = -3 - y$$

$$xy + 2x = 3 + y$$

$$x(y + 2) = 3 + y$$

$$x = \frac{3+y}{y+2}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{x+2}$$

Como $f^{-1}(1-a) = 2$

$$\frac{3+(1-a)}{(1-a)+2} = 2$$

$$\frac{4-a}{3-a} = 2 \qquad (a \neq 3)$$

$$4-a = 2 \cdot (3-a)$$

$$4-a = 6-2a \qquad \rightarrow \qquad a = 2$$