MESA COMBINADA

EJERCICIO 1 (3 puntos)

Hallar la intersección entre los conjuntos A y B siendo

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ \ tales\ que\ \left|\frac{1}{2}x - 1\right| > 1\right\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R}\ \ tales\ que\ 5 - 2x \geq 0\}$$

Respuesta

Primero vamos a desarrollar la desigualdad del conjunto A

$$\left|\frac{1}{2}x - 1\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1 > 1 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}x - 1 < -1$$

$$\frac{1}{2}x - 1 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (4, +\infty)$$

$$\frac{1}{2}x - 1 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0)$$

Entonces $\boldsymbol{A} = (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{4}, +\infty)$

Ahora vamos a desarrollar la desigualdad del conjunto B

$$5 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geq -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

Entonces $\boldsymbol{B} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

Luego

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = [(-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{4}, +\infty)] \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] = (-\infty, \mathbf{0})$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = \sqrt{x + 1} \qquad g(x) = x^2 + x^4$

Hallar el conjunto de ceros de la función $(g \circ f)(x)$ sin dejar de tener en cuenta el dominio de la función f.

Respuesta

La función f está bien definida si $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$.

Hallamos la función $(g \circ f)(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{x+1}\right)^4 = x+1+\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^4 = x+1+(x+1)^2$$

$$= x+1+x^2+2x+1 = x^2+3x+2$$

Vamos a encontrar los ceros de la función cuadrática:

$$x^2+3x+2=0 \iff x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \implies x_1=-2 \quad x_2=-1$$

El único cero posible es $x_2 = -1$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Encontrar los valores de a y c para que la función f(x) = $\frac{ax+10}{cx-8}$ tenga asíntotas $y = 5$ y $x = 4$

Respuesta

Si la función tiene una asíntota vertical en $x = 3$ quiere decir que el denominador de la función se anula en dicho valor

$c\cdot 4-8=0 \iff c=2$

Calculamos el límite de la función cuando la variable tiende a infinto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+10}{2x-8} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{10}{x}\right)}{x\left(2-\frac{8}{x}\right)} = \frac{a}{2}$$

Si tiene que tener una asíntota horizontal en y = 5, entonces

$\frac{a}{2}=5 \iff a=10$

Ejercicio 4 (2 puntos)

Dado el punto $Q = (3; 1)$, hallar todos los puntos $P = (b; 1 - b)$ tales que la distancia entre los puntos sea **igual a $\sqrt{5}$.**

Respuesta

$$d(Q, P) = \sqrt{(3-b)^2 + \big(1-(1-b)\big)^2} = \sqrt{(3-b)^2 + (b)^2} =$$

$$= \sqrt{9 - 6b + b^2 + b^2} = \sqrt{9 - 6b + 2b^2}$$

Por otro lado $d(Q, P) = \sqrt{5}$, entonces

$$\sqrt{9 - 6b + 2b^2} = \sqrt{5}$$

$$9 - 6b + 2b^2 = 5$$

$$9 - 6b + 2b^2 - 5 = 0$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

Buscamos las raíces de la cuadrática

$$b_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Los puntos son aquellos que tienen el valor de b igual a:

$b_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$b_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$

$P_1 = (2; 1-2) = (2; -1)$

$P_2 = (1; 1-1) = (1; 0)$