MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

TERCER TURNO – TEMA 3

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Sea $R(x) = c(x-2)^3$ un polinomio de grado 3 que verifica $R(1) = -\frac{1}{2}$.

Hallar el valor de la constante $c \neq 0, c \in \mathbb{R}$ y el conjunto de negatividad del polinomio.

Resolución:

Podemos averiguar el valor de c utilizando que $R(1) = -\frac{1}{2}$. Reemplazamos en la fórmula de $R(x)$:

$$c \cdot (1-2)^3 = -\frac{1}{2}$$

$$c \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{2}}$$

La fórmula de $R(x)$ es entonces:

$$R(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3$$

En primer lugar, notemos que la fórmula de $R(x)$ está factorizada y podemos ver que 2 es la única raíz y es de multiplicidad 3. Además, sabemos que su dominio son todos los números reales por tratarse de una función polinómica.

Utilizamos la consecuencia del teorema de Bolzano para hallar los conjuntos de positividad y negatividad:

$(-\infty;\mathbf{2})$	$\mathbf{2}$	$(\mathbf{2};+\infty)$
$R(1)=\frac{1}{2}(-1)^3=-\frac{1}{2}<0$	$R(2)=0$	$R(3)=\frac{1}{2}1^3=\frac{1}{2}>0$

Por lo tanto, el conjunto de negatividad del polinomio es $\boldsymbol{C^-}=(-\infty;\mathbf{2})$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$C=\{x\in\mathbb{R}:\ |2x-19|\leq 1\}$

$D=\{x\in\mathbb{R}:\ x\cdot(x+6)\leq 0\}$

Expresar como intervalo o unión de intervalos al conjunto $C\cup D$.

Graficar en la recta real el conjunto $C\cup D$.

Resolución:

Comencemos expresando a los conjuntos C y D como intervalos o unión de intervalos:

Para C:

$$|2x-19|\leq 1$$

$$-1\leq 2x-19\leq 1$$

$$18\leq 2x\leq 20$$

$$9\leq x\leq 10$$

Entonces $C=[9;10]$

Para D:

$x \cdot (x+6) \leq 0$

El producto es menor o igual a cero:

- Si $x \leq 0 \;\; y \;\; x+6 \geq 0$. Esto ocurre si $x \in [-6; 0]$.
- Si $x \geq 0 \;\; y \;\; x+6 \leq 0$. En este caso la solución es vacía.

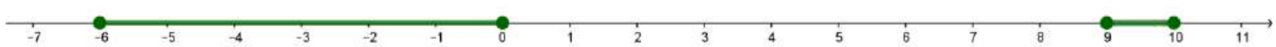
Entonces $D = [-6; 0]$

Todos los valores que pertenezcan a $C \cup D$ son los que pertenecen a C o al conjunto D.

Entonces:

$$\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D} = [-6; 0] \cup [9; 10]$$

Representamos en la recta $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$



Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje de las abscisas (eje x) en $x = -2$, pasa por el punto $(6; 48)$ y su eje de simetría se encuentra en $x = 1$

Resolución:

Sabemos que una de las raíces de la parábola buscada es $x = -2$ y, como su eje de simetría es la recta $x = 1$, sabemos también que 1 es la abscisa del vértice. Como dicha abscisa es el promedio de las dos raíces podemos usar esta idea para hallar la otra raíz:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-2 + x_2}{2} \Rightarrow 2 = -2 + x_2 \Rightarrow \; x_2 = 4$$

Conocidas las dos raíces, podemos plantear la forma factorizada de la fórmula de la parábola, de la que desconocemos el coeficiente principal:

$$y = a(x+2)(x-4)$$

Para hallar el coeficiente principal, utilizamos el punto $(6; 48)$ por el que pasa la parábola.

$$48 = a(6+2)(6-4)$$
$$48 = a \cdot 8 \cdot 2$$
$$3 = a$$

La fórmula de la parábola es:

$$\boldsymbol{y = 3(x+2)(x-4)}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dada la función

$$h(x) = \frac{3x + 2c}{1 + x}$$

determinar el valor de la constante $c \in R$ para que $h^{-1}(4) = 12$

Resolución:

Comencemos calculando la fórmula de $h^{-1}(x)$:

$$y = \frac{3x + 2c}{1 + x}$$
$$(1 + x)y = 3x + 2c$$
$$y + xy = 3x + 2c$$
$$xy - 3x = 2c - y$$
$$x(y - 3) = 2c - y$$
$$x = \frac{2c - y}{y - 3}$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$h^{-1}(x) = \frac{2c - x}{x - 3}$$

Nos resta averiguar el valor de c. Para ello usamos que $h^{-1}(4) = 12$

$$\frac{2c - 4}{4 - 3} = 12$$

$$2c - 4 = 12$$

$$2c = 16 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = 8}$$

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

TERCER TURNO – TEMA 4

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ y cruza al eje de ordenadas en $y = 4$.

Resolución:

Como la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ está dada en forma canónica, podemos obtener las coordenadas de su vértice:

$$V = (3; -5)$$

El problema nos dice que la recta cruza el eje de ordenadas en $y = 4$. Esto quiere decir que la recta pasa por el punto $(0; 4)$.

La ecuación de la recta buscada es de la forma

$$y = mx + b$$

Utilizamos ambos puntos para calcular la pendiente m de la recta:

$$m = \frac{-5-4}{3-0} = \frac{-9}{3} = -3$$

Si la recta pasa por el punto $(0; 4)$ conocemos su ordenada al origen. Es decir, $b = 4$

La ecuación de la recta es

$$\boldsymbol{y = -3x + 4}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dada la función

$$f(x) = \frac{6x+2}{x-a}$$

determinar el valor de la constante $a \in R$ para que $f^{-1}(7) = 16$

Resolución:

Comencemos calculando la fórmula de $f^{-1}(x)$:

$$y = \frac{6x+2}{x-a}$$
$$(x-a)\cdot y = 6x+2$$
$$xy - ay = 6x+2$$
$$xy - 6x = ay+2$$
$$x\cdot(y-6) = ay+2$$
$$x = \frac{ay+2}{y-6}$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable, tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{ax+2}{x-6}$$

Nos resta averiguar el valor de la constante a. Para ello usamos que $f^{-1}(7) = 16$.

$$\frac{7a+2}{7-6} = 16$$
$$7a+2 = 16$$
$$7a = 14 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Sea $P(x) = a(x-2)^3$ un polinomio de grado 3 que verifica $P(4) = -8$.

Hallar el valor de la constante $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ y el conjunto de positividad del polinomio.

Resolución:

Podemos averiguar el valor de la constante $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ utilizando que $P(4) = -8$.

Reemplazamos en la fórmula de $P(x)$:

$$a(4-2)^3 = -8 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 8 = -8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = -1}$$

La fórmula de $P(x)$ es entonces:

$$P(x) = -(x-2)^3$$

Utilicémosla para hallar su conjunto de positividad.

En primer lugar, notemos que la fórmula de $P(x)$ está factorizada y podemos ver que 2 es la única raíz y es de multiplicidad tres. Además, sabemos que su dominio son todos los números reales por tratarse de una función polinómica.

Utilizamos la consecuencia del teorema de Bolzano para hallar los conjuntos de positividad y negatividad:

$(-\infty; \mathbf{2})$	$\mathbf{2}$	$(\mathbf{2}; +\infty)$
$P(1) = -(-1)^3 = 1 > 0$	$P(2) = 0$	$P(3) = -1^3 = -1 < 0$

Por lo tanto, el conjunto de positividad del polinomio es: $\boldsymbol{C^+} = (-\infty; \mathbf{2})$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; -5 \leq 3x - 2 \leq 13\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \; x^2 + 4 \geq 20\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos al conjunto $A \cup B$.

Graficar en la recta real el conjunto $A \cup B$.

Resolución:

Comencemos expresando a los conjuntos A y B como intervalos o unión de intervalos:

Para A:

$$-5 \leq 3x - 2 \leq 13$$

$$-3 \leq 3x \leq 15$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

Entonces $A = [-1; 5]$

Para B:

$$x^2 + 4 \geq 20$$

$$x^2 \geq 16$$

$$|x| \geq 4$$

$$x \leq -4 \quad \text{ó} \quad x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -4] \quad \text{ó} \quad x \in [4; +\infty)$$

Entonces $B = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

Todos los valores que pertenezcan a $A \cup B$ son los que pertenecen a A y también a B. Es decir,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = [-1; 5] \cup [(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)]$$

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = (-\infty; -\mathbf{4}] \cup [-\mathbf{1}; +\infty)$$

Representamos en la recta primero el conjunto A en azul y el B en rojo:

Así, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ será:

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

TERCER TURNO – TEMA 1

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Sea $P(x) = a(x-2)^3$ un polinomio de grado 3 que verifica $P(4) = -8$.

Hallar el valor de la constante $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ y el conjunto de positividad del polinomio.

Resolución:

Podemos averiguar el valor de la constante $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ utilizando que $P(4) = -8$.

Reemplazamos en la fórmula de $P(x)$:

$$a(4-2)^3 = -8 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 8 = -8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = -1}$$

La fórmula de $P(x)$ es entonces:

$$P(x) = -(x-2)^3$$

Utilicémosla para hallar su conjunto de positividad.

En primer lugar, notemos que la fórmula de $P(x)$ está factorizada y podemos ver que 2 es la única raíz y es de multiplicidad tres. Además, sabemos que su dominio son todos los números reales por tratarse de una función polinómica.

Utilizamos la consecuencia del teorema de Bolzano para hallar los conjuntos de positividad y negatividad:

$(-\infty; \mathbf{2})$	**2**	$(\mathbf{2}; +\infty)$
$P(1) = -(-1)^3 = 1 > 0$	$P(2) = 0$	$P(3) = -1^3 = -1 < 0$

Por lo tanto, el conjunto de positividad del polinomio es: $\boldsymbol{C^+} = (-\infty; \mathbf{2})$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -5 \leq 3x - 2 \leq 13\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 4 \geq 20\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos al conjunto $A \cup B$.

Graficar en la recta real el conjunto $A \cup B$.

Resolución:

Comencemos expresando a los conjuntos A y B como intervalos o unión de intervalos:

Para A:

$$-5 \leq 3x - 2 \leq 13$$

$$-3 \leq 3x \leq 15$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

Entonces $A = [-1; 5]$

Para B:

$$x^2 + 4 \geq 20$$

$$x^2 \geq 16$$

$$|x| \geq 4$$

$$x \leq -4 \quad ó \quad x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -4] \quad ó \quad x \in [4; +\infty)$$

Entonces $B = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

Todos los valores que pertenezcan a $A \cup B$ son los que pertenecen a A y también a B. Es decir,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = [-1; 5] \cup [(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)]$$

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = (-\infty; \boldsymbol{-4}] \cup [\boldsymbol{-1}; +\infty)$$

Representamos en la recta primero el conjunto A en azul y el B en rojo:

Así, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ será:

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ y cruza al eje de ordenadas en $y = 4$.

Resolución:

Como la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ está dada en forma canónica, podemos obtener las coordenadas de su vértice:

$$V = (3; -5)$$

El problema nos dice que la recta cruza el eje de ordenadas en $y = 4$. Esto quiere decir que la recta pasa por el punto $(0; 4)$.

La ecuación de la recta buscada es de la forma

$$y = mx + b$$

Utilizamos ambos puntos para calcular la pendiente m de la recta:

$$m = \frac{-5-4}{3-0} = \frac{-9}{3} = -3$$

Si la recta pasa por el punto $(0; 4)$ conocemos su ordenada al origen. Es decir, $b = 4$

La ecuación de la recta es

$$\boldsymbol{y = -3x + 4}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{6x+2}{x-a}$$

determinar el valor de la constante $a \in R$ para que $f^{-1}(7) = 16$

Resolución:

Comencemos calculando la fórmula de $f^{-1}(x)$:

$$y = \frac{6x+2}{x-a}$$

$$(x-a) \cdot y = 6x+2$$

$$xy - ay = 6x + 2$$

$$xy - 6x = ay + 2$$

$$x \cdot (y-6) = ay + 2$$

$$x = \frac{ay+2}{y-6}$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable, tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{ax+2}{x-6}$$

Nos resta averiguar el valor de la constante a. Para ello usamos que $f^{-1}(7) = 16$.

$$\frac{7a+2}{7-6} = 16$$

$$7a + 2 = 16$$

$$7a = 14 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

Universidad de Buenos Aires

UBAXXI

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

TERCER TURNO – TEMA 2

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y = x^2 + x + 9$ y cruza al eje de las abscisas en $x = 1$.

Resolución:

Como la parábola está dada en forma polinómica, podemos utilizar la fórmula para la abscisa del vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

donde a es el coeficiente principal ($a = 1$) y b el coeficiente lineal ($b = 1$).

Entonces:

$$x_v = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_v = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = \frac{35}{4}$$

El vértice de la parábola es

$$V = \left(-\frac{1}{2}; \frac{35}{4}\right)$$

Debemos hallar la ecuación de la recta

$$y = mx + b$$

que pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}; \frac{35}{4}\right)$ y $(1; 0)$.

Utilizamos ambos puntos para hallar la pendiente m:

$$m = \frac{\frac{35}{4} - 0}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{35}{6}$$

Entonces

$$y = -\frac{35}{6}x + b$$

Utilizamos el punto $(1; 0)$ para hallar el valor de b:

$$0 = -\frac{35}{6} \cdot (1) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{35}{6}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$\boldsymbol{y = -\frac{35}{6}x + \frac{35}{6}}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dada la función

$$g(x) = \frac{2b - x}{x + 3}$$

determinar el valor de la constante $b \in R$ para que $g^{-1}(2) = 4$

Resolución:

Comencemos calculando la fórmula de $g^{-1}(x)$:

$$y = \frac{2b - x}{x + 3}$$

$$(x + 3) \cdot y = 2b - x$$

$$xy + 3y = 2b - x$$

$$xy + x = 2b - 3y$$

$$x(y+1) = 2b - 3y$$
$$x = \frac{2b - 3y}{y+1}$$

Por lo tanto, haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$g^{-1}(x) = \frac{2b - 3x}{x+1}$$

Nos resta averiguar el valor de la constante b. Para ello usamos que $g^{-1}(2) = 4$:

$$\frac{2b - 3 \cdot 2}{2+1} = 4$$
$$\frac{2b - 6}{3} = 4$$
$$2b - 6 = 12$$
$$\boldsymbol{b = 9}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Sea $Q(x) = b(x-3)^5$ un polinomio de grado 5 que verifica $Q(1) = 32$.

Hallar el valor de la constante $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$ y el conjunto de negatividad del polinomio.

Resolución:

Podemos averiguar el valor de la constante b utilizando que $Q(1) = 32$.

Reemplazamos en la fórmula de $Q(x)$:

$$b \cdot (1-3)^5 = 32$$
$$b \cdot (-32) = 32$$
$$\boldsymbol{b = -1}$$

La fórmula de $Q(x)$ es entonces

$$Q(x) = -(x-3)^5$$

En primer lugar, notemos que la fórmula de $Q(x)$ está factorizada y podemos ver que $x = 3$ es la única raíz y es de multiplicidad 5. Además, sabemos que su dominio son todos los números reales por tratarse de una función polinómica.

Utilizamos la consecuencia del teorema de Bolzano para hallar los conjuntos de positividad y negatividad:

$(-\infty; \mathbf{3})$	**3**	$(\mathbf{3}; +\infty)$
$Q(2) = -(-1)^5 = 1 > 0$	$Q(3) = 0$	$Q(4) = -1^5 = -1 < 0$

Por lo tanto, el conjunto de negatividad del polinomio es $\boldsymbol{C^-} = (\mathbf{3}; +\infty)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$M = \{x \in \mathbb{R} : (x+2)^2 - 5 \leq 20\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : \ -8 - 5x \leq -2x + 3\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos al conjunto $M \cup N$.

Graficar en la recta real el conjunto $M \cup N$.

Resolución:

Comencemos expresando a los conjuntos M y N como intervalos o unión de intervalos:

Para M:

$$(x+2)^2 - 5 \leq 20$$

$$(x+2)^2 \leq 25$$

$$|x+2| \leq 5$$

$$-5 \leq x + 2 \leq 5$$

$$-7 \leq x \leq 3$$

Entonces $M = [-7; 3]$

Para N:

$$-8-5x \leq -2x+3$$

$$-11 \leq 3x$$

$$-\frac{11}{3} \leq x$$

Entonces $N = \left[-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}; +\infty\right)$

Todos los valores que pertenezcan a $M \cup N$ son los que pertenecen a M y también a N.

Entonces

$$M \cup N = [-7;3] \cup \left[-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}; +\infty\right)$$

$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N} = [-\mathbf{7}; +\infty)$

Representamos en la recta primero el conjunto M en azul y el N en rojo:

Así, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ será: