1. Representar en la recta numérica y escribir como unión de intervalos el conjunto:

$$A = \{x \in R : |2 + x| < 6 \;\; \wedge \;\; 3x + 2 \geq 5\}$$

Solución y comentarios

Debemos hallar los valores de $x \in R$ que verifican, al mismo tiempo que, $|2 + x| < 6$ y que $3x + 2 \geq 5$.

Pedir que $|2 + x| < 6$ es equivalente a pedir que:

$$-6 < 2 + x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 2 < x < 6 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -8 < x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-8; 4)$$

Es decir, el conjunto solución de $|2 + x| < 6$ es:

$$S_1 = (-8; 4)$$

La segunda condición que se debe satisfacer es equivalente a:

$$3x + 2 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq 5 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1; +\infty)$$

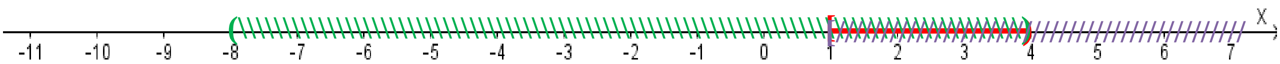
Es decir, el conjunto solución de $3x + 2 \geq 5$ es:

$$S_2 = [1; +\infty)$$

Por lo tanto, para que se cumplan ambas condiciones al mismo tiempo, debe cumplirse que:

$$x \in S_1 \cap S_2 = (-8; 4) \cap [1; +\infty) = [1; 4)$$

La representación gráfica del intervalo es:



2. Expresar la factorización de un polinomio $\boldsymbol{P}$ de grado 3 que tenga por raíz doble a $x = 2$, por raíz simple a $x = -3$, y sabiendo que además $P(0) = 24$.

Solución y comentarios

El polinomio tiene en $x = 2$ una raíz doble y en $x = -3$ una raíz simple. Como el grado del polinomio es 3 no puede tener más raíces que las mencionadas, pues la suma de sus multiplicidades es 3.

Por lo tanto

$$P(x) = k(x-2)(x-2)(x-(-3))$$
$$P(x) = k(x-2)^2(x+3)$$

Solo falta determinar el valor de la constante "k". Sabemos que $P(0) = 24$, entonces:

$$P(0) = 24$$
$$k(0-2)^2(0+3) = 24$$
$$12k = 24$$
$$k = 2$$

El polinomio es:

$$\boldsymbol{P(x) = 2(x-2)^2(x+3)}$$

3. Encontrar analíticamente el conjunto de valores de $x \in R$ tal que la distancia desde el punto $A = (2;2)$ al punto $B = (x;1)$ sea mayor que $\sqrt{5}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (2;2)$, $B = (x;1)$ y $d(A;B) > \sqrt{5}$, entonces:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (1-2)^2} > \sqrt{5}$$
$$(x-2)^2 + (1-2)^2 > 5$$
$$x^2 + 2 \cdot (-2) \cdot x + (-2)^2 + 1 > 5$$
$$x^2 - 4x + 5 > 5$$
$$x^2 - 4x > 5 - 5$$
$$x^2 - 4x > 0$$
$$x(x-4) > 0$$

El producto será mayor que cero sí:

$$x > 0 \ \wedge \ x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \ \wedge \ x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (4; +\infty)$$

O bien si

$$x < 0 \ \wedge \ x - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \ \wedge \ x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0)$$

La distancia entre los puntos será mayor que $\sqrt{5}$ si $x \in (4; +\infty)$, o sí $x \in (-\infty; 0)$.

Es decir, $\boldsymbol{x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)}$.

Otra manera de hallar el conjunto solución

Sabemos que la cuadrática $\boldsymbol{x(x-4)}$ se anula en $x = 0$ y en $x = 4$.

Puede analizarse el signo de $\boldsymbol{x(x-4)}$ en los intervalos $(-\infty; 0); (0; 4)\ y\ (4; +\infty)$. De todos estos intervalos interesan aquellos donde $\boldsymbol{x(x-4)}$ tome valores positivos.

4. Sea $\boldsymbol{f}$ una función lineal ($f(x) = ax + b$) que cumple con que $f(2) = 8$ y $f(-1) = -1$.
Sea $g(x) = x^3$. Hallar analíticamente el conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

Solución y comentarios

Primero hay que hallar la función lineal $f(x)$. Sabemos que $f(2) = 8$ y $f(-1) = -1$, entonces:

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (2) + b = 8$$

$$f(-1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (-1) + b = -1$$

Es decir

$$2a + b = 8$$

$$-1a + b = -1$$

De la segunda ecuación se obtiene que

$$b = -1 + a$$

Reemplazando en la primer ecuación el valor de "b":

$$2a + (-1 + a) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 3}$$

Entonces,

$$b = -1 + a = -1 + 3 = 2, \quad \boldsymbol{b = 2}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = 3x + 2$$

Debemos hallar analíticamente el conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x + 2) = (3x + 2)^3.$$

La función $(3x + 2)^3$ tomará valores positivos si y solo si

$$3x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

El conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$ es:

$$C^+ = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Otra manera

Sabemos que la función $(g \circ f)(x) = (3x + 2)^3$ se anula en $x = -\frac{2}{3}$. Puede analizarse el signo de $(3x + 2)^3$ en los intervalos $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ y $(-\frac{2}{3}; +\infty)$. De estos dos intervalos nos interesa aquel donde $(3x + 2)^3$ toma valores positivos. Es decir:

- $-1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ $\quad (3 \cdot (-1) + 2)^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad (3x + 2)^3 < 0$ en el intervalo $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$
- $1 \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ $\quad (3 \cdot 1 + 2)^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad (3x + 2)^3 > 0$ en el intervalo $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

1. Hallar analíticamente el o los valores de $h \in R$, para que la distancia entre $A = (-h\,;3)$ y $B = (1; 2h+1)$ sea igual a $\sqrt{13}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (-h; 3)$, $B = (1; 2h+1)$ y $d(A; B) = \sqrt{13}$, entonces

$$\sqrt{(1-(-h))^2 + (2h+1-3)^2} = \sqrt{13}$$
$$\sqrt{(1+h)^2 + (2h-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$(1+h)^2 + (2h-2)^2 = 13$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado y trabajamos algebraicamente:

$$1 + 2h + h^2 + 4h^2 - 8h + 4 = 13$$
$$5h^2 - 6h + 5 = 13$$
$$5h^2 - 6h + 5 - 13 = 0$$
$$5h^2 - 6h - 8 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo $a = 5, b = -6$ y $c = -8$.

$$h_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (5) \cdot (-8)}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10}$$

$$h_1 = \frac{6 - 14}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$h_2 = \frac{6 + 14}{10} = 2$$

Los valores de h que hacen que la distancia ente los puntos $A\ y\ B$ sea igual a $\sqrt{13}$ son:

$$h_1 = -\frac{4}{5}$$

$$h_2 = 2$$

2. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 2$; $g(x) = -4x^2 + 16x - 12$, hallar analíticamente el o los puntos de intersección de ambas funciones

Solución y comentarios

Primero debemos plantear la ecuación $f(x) = g(x)$ para hallar el o los valores de la abscisa del punto de intersección.

$$f(x) = g(x)$$
$$2x - 2 = -4x^2 + 16x - 12$$
$$2x - 2 + 4x^2 - 16x + 12 = 0$$
$$4x^2 - 14x + 10 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 4, b = -14$ y $c = 10$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (10)}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 160}}{8} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{14 \pm 6}{8}$$

$$x_1 = \frac{14 + 6}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{14 - 6}{8} = 1$$

Si $x_1 = \frac{5}{2}$ el valor de la ordenada es $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 3$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$

Si $x_2 = 1$ el valor de la ordenada es $f(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$. En este caso el punto de intersección es el $P_2 = (1; 0)$

Las funciones se cruzan en los puntos

$$P_1 = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$$

$$P_2 = (1; 0)$$

.

3. Sea $\boldsymbol{y_1 = 5x - 1}$, hallar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$que pasa por el punto $(-1\,;\,-2)$. Hallar analíticamente el conjunto de negatividad C^- de la recta obtenida.

Solución y comentarios

En este ejercicio necesitamos conocer en primer lugar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(-1;-2)$.

Sea $\boldsymbol{y_2 = mx + b}$ la ecuación de la recta que buscamos.

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Por lo tanto la pendiente de la recta $\boldsymbol{y_2}$ vale 5.

Entonces,

$$\boldsymbol{y_2 = 5x + b}$$

La recta $\boldsymbol{y_2}$ pasa por el punto $(-1;-2)$. Esto nos indica que si reemplazamos el valor de x en la ecuación de la recta $\boldsymbol{y_2}$ por -1, el valor de y_2 que obtendremos será -2:

$$-2 = 5 \cdot (-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad -2 = -5 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$$

La ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ es:

$$\boldsymbol{y_2 = 5x + 3}$$

Como se pide el conjunto de negatividad debemos encontrar los valores de $x \in R$ para los cuales $\boldsymbol{y_2} < 0$. Esto es lo mismo que pedir:

$$5x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$$

El conjunto buscado es el intervalo $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$.

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = 2x - 1$, hallar el o los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = f\big(g(x)\big) = 0$

Solución y comentarios

Lo primero que debemos hacer es encontrar la función $h(x)$. Sabemos que $h(x) = f(g(x))$ y que $g(x) = 2x - 1$, entonces:

$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 3(2x - 1)$

Como nos piden hallar los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = 0$, igualamos la función obtenida a cero.

Es decir:

$$(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) = 0$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, aplicamos propiedad distributiva y operamos algebraicamente de la siguiente manera:

$$(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (-1) + (-1)^2 - 6x + 3 = 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 - 6x + 3 = 0$$
$$4x^2 - 10x + 4 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 4, b = -10$ y $c = 4$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (4)}}{2 \cdot 4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{8} = \frac{10 \pm 6}{8}$$
$$x_1 = \frac{10 + 6}{8} = 2$$
$$x_2 = \frac{10 - 6}{8} = \frac{1}{2}$$

Los valores donde se anula la función $h(x)$ son: $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

<u>**Otra manera de encontrar los ceros o raíces de la función *h***:</u>

$(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) = 0$

Sacando factor común $(2x - 1)$:

$$(2x - 1)[(2x - 1) - 3] = 0$$
$$(2x - 1)[2x - 4] = 0 \iff 2x - 1 = 0 \text{ ó } 2x - 4 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ó } x = 2$$

1. Hallar $\boldsymbol{f^{-1}}$ siendo $f(x) = \sqrt{x+4} + 7$. Calcular el dominio de cada una de las funciones.

Solución y comentarios

Para empezar, debemos calcular el dominio de $\boldsymbol{f}$. Al intervenir una raíz cuadrada, se debe cumplir que:

$$x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4$$

Entonces:

$$\boldsymbol{Dom}\ (\boldsymbol{f}) = [-\mathbf{4}; +\infty)$$

Como nos piden calcular la función inversa de $\boldsymbol{f}$ debemos calcular cual es el conjunto imagen de dicha función.

El primer término de la función $\left(\sqrt{x+4}\right)$ admitirá valores mayores o iguales que cero, es decir,

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+4} + 7 \geq 7$$

Por lo tanto, para todo $x \in \boldsymbol{Dom\ f}$, tenemos que

$$f(x) = \sqrt{x+4} + 7 \geq 7$$

El **conjunto Imagen** de la función es:

$$\boldsymbol{Im}\ (\boldsymbol{f}) = [\mathbf{7}; +\infty)$$

Continuamos buscando la solución de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ para todo $\boldsymbol{y} \in [\mathbf{7}; +\infty)$:

$$\sqrt{x+4} + 7 = y$$

$$\sqrt{x+4} = y - 7$$

$$x + 4 = (y-7)^2$$

$$x = (y-7)^2 - 4$$

De esta manera:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = (x-7)^2 - 4}$$

El dominio de la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ coincidirá con la imagen de la función $\boldsymbol{f}$, es decir,

$$\boldsymbol{Dom\ f^{-1}} = [\mathbf{7}; +\infty)$$

2. Hallar analíticamente el o los valores de $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$ tal que $|-2a+3| < 3$.

Solución y comentarios

Por tratarse de una inecuación en la que interviene el módulo, debemos aplicar la propiedad correspondiente:

Para que $|-2a+3| < 3$, debe ocurrir:

$$-3 < -2a + 3 < 3$$

Por lo tanto, desdoblamos la inecuación planteada en dos partes:

$$-3 < -2a + 3 \qquad \text{y} \qquad -2a + 3 < 3$$

$$2a < 3 + 3 \qquad\qquad -2a < 3 - 3$$

$$2a < 6 \qquad\qquad a > 0 : (-2)$$

$$a < 3 \qquad\qquad a > 0$$

Deben ocurrir las dos cosas simultáneamente:

$$a < 3 \iff a \in (-\infty; 3) \qquad \text{y} \qquad a > 0 \iff a \in (0; +\infty)$$

El conjunto solución es:

$$S = (-\infty; 3) \cap (0; +\infty) = (0; 3)$$

Otra manera de resolver la inecuación:

$$|-2a + 3| < 3$$

$$-3 < -2a + 3 < 3$$

$$-3 - 3 < -2a < 3 - 3$$

$$-6 < -2a < 0 \qquad \textit{dividiendo los términos de la inecuación por } (-2)$$

$$3 > a > 0 \qquad \textit{que es equivalente a}$$

$$0 < a < 3$$

3. Hallar $A = \left\{x \in R, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$, sabiendo que $f(x) = 2x - 2$ y $g(x) = x - 3$.
(Aclaración: para resolver el ejercicio no pasar multiplicando la función g(x))

Solución y comentarios

Los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ son los valores de $x \in R$ que son solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2x-2}{x-3} \geq 0$$

Notar que el denominado nunca podrá tomar el valor $x = 3$.

Para que el cociente resulte mayor o igual que cero, existen dos posibilidades:

- Primer caso:

$$\begin{aligned} & 2x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0 \qquad (\mathbf{1}) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \geq 2 \quad \wedge \quad x > 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq 1 \quad \wedge \quad x > 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in [1; +\infty) \cap (3; +\infty) = (3; +\infty) \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución para **(1)** son los valores de $x \in (3; +\infty)$.

$\boldsymbol{S_1} = (\mathbf{3}; +\infty)$.

- Segundo caso

$$\begin{aligned} & 2x - 2 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 3 < 0 \qquad (\mathbf{2}) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \leq 2 \quad \wedge \quad x < 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 1 \quad \wedge \quad x < 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in (-\infty; 1] \cap (-\infty; 3) = (-\infty; 1] \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución para **(2)** son los valores de $x \in (-\infty; 1]$.

$\mathbf{S_2} = (-\infty; 1]$

Como puede ocurrir que $x \in \mathbf{S_1}$ ó $x \in \mathbf{S_2}$, el conjunto que se busca es la unión de ambos intervalos. De aquí se deduce que el conjunto $\boldsymbol{A}$ inicialmente pedido es:

$$\boldsymbol{A} = (-\infty; \mathbf{1}] \cup (\mathbf{3}; +\infty)$$

4. Dadas las funciones $f(x) = x - \frac{9}{4}$; $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, hallar $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ y $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

   Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$

Solución y comentarios

Primero hallamos las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(x - \frac{9}{4}\right) = \left(x - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$

Para hallar los valores de $x \in R$ para que $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ planteamos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Entonces,

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

o bien

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

El conjunto de ceros de la función $(f \circ g)$ es $C_0 = \{1; -2\}$

1. Representar en la recta numérica y escribir como unión de intervalos el conjunto:

$$A = \{x \in R : 2x + 3 > 9 \ \wedge \ |x + 3| \leq 8 \ \}$$

Solución y comentarios

Debemos hallar los valores de $x \in R$ que verifican, al mismo tiempo que, $2x + 3 > 9$ y que $|x + 3| \leq 8$.

De la primera condición se deduce que:

$$2x + 3 > 9 \ \Leftrightarrow \ 2x > 9 - 3 \ \Leftrightarrow \ 2x > 6 \Leftrightarrow \ x > 3 \ \Leftrightarrow \ x \in (3; +\infty)$$

Es decir, el conjunto solución de $2x + 3 > 9$ es:

$$S_1 = (3; +\infty)$$

Pedir que $|x + 3| < 8$ es equivalente a pedir que:

$$-8 \leq x + 3 \leq 8 \ \Leftrightarrow \ -8 - 3 \leq x \leq 8 - 3 \ \Leftrightarrow \ -11 \leq x \leq 5 \ \Leftrightarrow \ x \in [-11; 5]$$

Es decir, el conjunto solución de $|x + 3| \leq 8$ es:

$$S_2 = (-11; 5)$$

Por lo tanto, para que se cumplan ambas condiciones al mismo tiempo, los valores posibles para x son:

$$x \in S_1 \cap S_2 = (3; +\infty) \cap [-11; 5] = (3; 5]$$

La representación gráfica del intervalo es:

2. Expresar la factorización de un polinomio $Q(x)$ de grado 3 que tenga por raíz doble a $x = 3$ y por raíz simple a $x = -5$, sabiendo que además $Q(0) = 90$.

Solución y comentarios

El polinomio tiene en $x = 3$ una raíz doble y en $x = -5$ una raíz simple. Como el grado del polinomio es 3 no puede tener más raíces que las mencionadas, pues la suma de sus multiplicidades es 3.

Por lo tanto

$$Q(x) = k(x-3)(x-3)(x-(-5))$$

$$Q(x) = k(x-3)^2(x+5)$$

Solo falta determinar cuanto vale la constante “k”. Sabemos que $Q(0) = 90$, entonces:

$$Q(0) = 90$$

$$k(0-3)^2(0+5) = 90$$

$$45k = 90$$

$$k = 2$$

El polinomio es:

$$\boldsymbol{Q(x) = 2(x-3)^2(x+5)}$$

3. Sea **"f"** una función lineal ($f(x) = ax + b$) que cumple con que $f(-1) = 2$ y $f(3) = 10$.
   Sea $g(x) = x^3$. Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

Solución y comentarios

Primero hay que hallar la función lineal $f(x) = ax + b$. Sabemos que $f(-1) = 2$ y $f(3) = 10$, entonces:

$$f(-1) = 2 \iff a \cdot (-1) + b = 2$$

$$f(3) = 10 \iff a \cdot (3) + b = 10$$

Es decir

$$-a + b = 2$$

$$3a + b = 10$$

De la primera ecuación se obtiene que

$$b = 2 + a$$

Reemplazando en la segunda ecuación el valor de "b":

$$3a + (2 + a) = 10 \iff 4a + 2 = 10 \iff 4a = 8 \iff \boldsymbol{a = 2}$$

Entonces

$$b = 2 + a = 2 + 2 = 4, \quad \boldsymbol{b = 4}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = 2x + 4$$

Debemos hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 4) = (2x + 4)^3.$$

La función $(g \circ f)(x) = (2x + 4)^3$ tomará valores negativos si y solo si

$$2x + 4 < 0 \iff 2x < -4 \iff x < -2 \iff x \in (-\infty; -2)$$

El conjunto de negatividad de la función $(g \circ f)$ es:

$$C^- = (-\infty; -2)$$

Otra manera

Sabemos que la función $(g \circ f)(x) = (2x + 4)^3$ se anula en $x = -2$. Puede analizarse el signo de $(2x + 4)^3$ en los intervalos $(-\infty; -2)$ y $(-2; +\infty)$. De estos dos intervalos nos interesa aquel donde $(2x + 4)^3$ toma valores negativos. Es decir:

- $-3 \in (-\infty; -2)$ $\quad (2 \cdot (-3) + 4)^3 = -8 \quad \Rightarrow \quad (2x + 4)^3 < 0$ en el intervalo $(-\infty; -2)$
- $1 \in (2; +\infty)$ $\quad (2 \cdot 1 + 4)^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad (2x + 4)^3 > 0$ en el intervalo $(2; +\infty)$

4. Encontrar analíticamente el conjunto de valores de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ tal que la distancia desde el punto $A = (3; x)$ al punto $B = (1; 3)$ sea mayor que $\sqrt{13}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En este problema $A = (3; y)$, $B = (1; 3)$, $d(A; B) > \sqrt{13}$, entonces:

$$\sqrt{(1-3)^2 + (3-x)^2} > \sqrt{13}$$
$$(-2)^2 + (3-x)^2 > 13$$
$$4 + (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + (3)^2 > 13$$
$$x^2 - 6x + 13 > 13$$
$$x^2 - 6x > 13 - 13$$
$$x^2 - 6x > 0$$
$$x(x-6) > 0$$

El producto será mayor que cero sí:

$$x > 0 \quad \wedge \quad x - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (6; +\infty)$$

O bien si

$$x < 0 \quad \wedge \quad x - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \wedge \quad x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0)$$

La distancia entre los puntos será mayor que $\sqrt{13}$ si $x \in (6; +\infty)$, o sí $x \in (-\infty; 0)$.

Es decir,

$$x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$$

Otra manera

Sabemos que la cuadrática $\boldsymbol{x(x-6)}$ se anula en $x = 0$ y en $x = 6$. Puede analizarse el signo de $x(x-6)$ en los intervalos $(-\infty; 0)$; $(0; 6)$ y $(6; +\infty)$. De todos estos intervalos interesan aquellos donde $\boldsymbol{x(x-6)}$ tome valores positivos.

1. Sabiendo que $f(x) = -4x + 5$ y $g(x) = -3x^2 - 5x + 7$, hallar analíticamente el o los puntos de intersección de ambas funciones.

Solución y comentarios

Primero debemos plantear la ecuación $f(x) = g(x)$ para hallar el o los valores de la abscisa del punto de intersección.

$$f(x) = g(x)$$

$$-4x + 5 = -3x^2 - 5x + 7$$

$$-4x + 5 + 3x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 3, b = 1$ y $c = -2$.

$$x_{1,2} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{6} = -1$$

Si $x_1 = \frac{2}{3}$ el valor de la ordenada es $f\left(\frac{2}{3}\right) = -4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = \frac{7}{3}$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Si $x_1 = -1$ el valor de la ordenada es $f(-1) = -4 \cdot (-1) + 5 = 9$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = (-1; 9)$

Las funciones se cruzan en los puntos

$$P_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$P_2 = (-1; 9)$$

.

2. Hallar analíticamente los valores de $h \in R$, para que la distancia entre $A = (h - 3\,; 3)$ y $B = (2; 2h)$ sea igual a $\sqrt{10}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y$B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (h - 3; 3)$, $B = (2; 2h)$ y $d(A; B) = \sqrt{10}$, entonces

$$\sqrt{(2 - (h + 3))^2 + (2h - 3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\sqrt{(-1 - h)^2 + (2h - 3)^2} = \sqrt{10}$$
$$(-1 - h)^2 + (2h - 3)^2 = 10$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado y trabajamos algebraicamente:

$$1 + 2h + h^2 + 4h^2 - 12h + 9 = 10$$
$$5h^2 - 10h + 10 = 10$$
$$5h^2 - 10h + 10 - 10 = 0$$
$$5h^2 - 10h = 0$$
$$h(5h - 10) = 0$$

El producto dará cero $\Leftrightarrow$ $h = 0$ $, ó\ si,$ $h = 2$

Los valores de h que hacen que la distancia ente los puntos $A\ y\ B$ sea igual a $\sqrt{10}$ son:

$$h_1 = 0$$
$$h_2 = 2$$

3. Sea $\boldsymbol{y_1 = -4x + 2}$, hallar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(2; 3)$.
Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la recta obtenida.

Solución y comentarios

En este ejercicio necesitamos conocer en primer lugar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(2; 3)$.

Sea $\boldsymbol{y_2 = mx + b}$ la ecuación de la recta que buscamos.

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Por lo tanto la pendiente de la recta $\boldsymbol{y_2}$ vale -4.

Entonces,

$$\boldsymbol{y_2 = -4x + b}$$

La recta $\boldsymbol{y_2}$ pasa por el punto $(2; 3)$. Esto nos indica que si reemplazamos el valor de $\boldsymbol{x \in R}$ en la ecuación de la recta $\boldsymbol{y_2}$ por 2, el valor de $\boldsymbol{y_2}$ que obtendremos será 3:

$$3 = -4 \cdot (2) + b \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -8 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 11$$

La ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ es:

$$\boldsymbol{y_2 = -4x + 11}$$

Como se pide el conjunto de negatividad debemos encontrar los valores de $x \in R$ para los cuales $\boldsymbol{y_2} < 0$. Esto es lo mismo que pedir:

$$-4x + 11 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x < -11 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{11}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$$

El conjunto buscado es el intervalo $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x - 1$, hallar el o los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = f\big(g(x)\big) = 0$.

Solución y comentarios

Lo primero que debemos hacer es encontrar la función $h(x)$. Sabemos que $h(x) = f(g(x))$ y que $g(x) = 3x - 1$, entonces:

$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x-1) = (3x-1)^2 - 2(3x-1)$

Como nos piden hallar los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = 0$, igualamos la función obtenida a cero.

Es decir:

$$(3x-1)^2 - 2(3x-1) = 0$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, aplicamos propiedad distributiva y operamos algebraicamente de la siguiente manera:

$$(3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot(-1) + (-1)^2 - 6x + 2 = 0$$
$$9x^2 - 6x + 1 - 6x + 2 = 0$$
$$9x^2 - 12x + 3 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 9, b = -12$ y $c = 3$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\cdot(9)\cdot(3)}}{2\cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{18} = \frac{12 \pm 6}{18}$$

$$x_1 = \frac{12+6}{18} = 1$$

$$x_2 = \frac{12-6}{18} = \frac{1}{3}$$

Los valores donde se anula la función $\boldsymbol{h}$ son:

$$x_1 = 1 \,,\, x_2 = \tfrac{1}{3}$$

<u>**Otra manera de encontrar los ceros o raíces de la función $\boldsymbol{h}$**:</u>

$(3x-1)^2 - 2(3x-1) = 0$

Sacando factor común $(3x-1)$:

$$(3x-1)\cdot[(3x-1) - 2] = 0$$

$$(3x-1)\cdot[3x-3] = 0 \Leftrightarrow \quad 3x - 1 = 0 \text{ ó } 3x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \text{ ó } x = 1$$

1. Hallar analíticamente el o los valores de $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ tal que $|5-2b| < 11$.

Solución y comentarios

Por tratarse de una inecuación en la que interviene el módulo, debemos aplicar la propiedad correspondiente:

Para que $|5-2b| < 11$, debe ocurrir:

$$-11 < 5-2b < 11$$

Por lo tanto, desdoblamos la inecuación planteada en dos partes:

$$-11 < 5-2b \quad \text{y} \quad 5-2b < 11$$

$$2b < 5+11 \qquad -2b < 11-5$$

$$2b < 16 \qquad b > 6:(-2)$$

$$b < 8 \qquad b > -3$$

Deben ocurrir las dos cosas simultáneamente:

$$b < 8 \quad \Leftrightarrow \quad b \in (-\infty; 8) \qquad \wedge \qquad b > -3 \quad \Leftrightarrow \quad b \in (-3; +\infty)$$

El conjunto solución es:

$$S = (-\infty; 8) \cap (-3; +\infty) = (-3; 8)$$

Otra manera de resolver la inecuación:

$$|5-2b| < 11$$

$$-11 < 5-2b < 11$$

$$-11-5 < -2b < 11-5$$

$$-16 < -2b < 6 \qquad \textit{dividiendo los términos de la inecuación por } (-2)$$

$$8 > b > -3 \qquad \textit{que es equivalente a}$$

$$-3 < b < 8$$

1. Hallar $\boldsymbol{f^{-1}}$ siendo $f(x) = \sqrt{x+1} - 9$. Calcular el dominio de cada una de las funciones.

Solución y comentarios

Para empezar, debemos calcular el dominio de $\boldsymbol{f}$. Al intervenir una raíz cuadrada, se debe cumplir que:

$$x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

Entonces:

$$\boldsymbol{Dom}\ (\boldsymbol{f}) = [-\mathbf{1}; +\infty)$$

Como nos piden calcular la función inversa de $\boldsymbol{f}$ debemos calcular cual es el conjunto imagen de dicha función.

El primer término de la función $\left(\sqrt{x+1}\right)$ admitirá valores mayores o iguales que cero, es decir,

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+1} - 9 \geq -9$$

Por lo tanto, para todo $x \in \boldsymbol{Dom\ f}$, tenemos que

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 9 \geq -9$$

El **conjunto Imagen** de la función es:

$$\boldsymbol{Im}\ (\boldsymbol{f}) = [-\mathbf{9}; +\infty)$$

Continuamos buscando la solución de $\boldsymbol{f(x) = y}$ para todo $\boldsymbol{y} \in [-\mathbf{9}; +\infty)$:

$$\sqrt{x+1} - 9 = y$$
$$\sqrt{x+1} = y + 9$$
$$x + 1 = (y+9)^2$$
$$x = (y+9)^2 - 1$$

De esta manera:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = (x+9)^2 - 1}$$

El dominio de la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ coincidirá con la imagen de la función $\boldsymbol{f}$, es decir,

$$\boldsymbol{Dom\ f^{-1}} = [-\mathbf{9}; +\infty)$$

4. Dadas las funciones $g(x) = x - \frac{49}{4}$; $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, hallar $(\boldsymbol{f \circ g})$ y $(\boldsymbol{g \circ f})$.

   Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función $(\boldsymbol{g \circ f})$

Solución y comentarios

Primero hallamos las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x - \frac{49}{4}\right) = \left(x - \frac{49}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{45}{4}\right)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Para hallar los valores de $x \in R$ para que $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ planteamos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

Entonces,

$$x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

o bien

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

El conjunto de ceros de la función $(f \circ g)$ es $C_0 = \{3; -4\}$

2. Hallar $A = \left\{x \in R, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$, sabiendo que $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 3x - 6$.
   Aclaración: para resolver el ejercicio no pasar multiplicando la función g(x).

Solución y comentarios

En primer lugar, por tratarse de un cociente de funciones, debemos considerar que $g(x) \neq 0$. Por lo tanto, $3x - 6 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \neq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

Luego, como $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, considerando las funciones dadas, los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ son los valores de $x \in R$ que son solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x+1}{3x-6} \geq 0$$

Para que el cociente resulte mayor o igual que cero, existen dos posibilidades:

- Primer caso:

$$x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x - 6 > 0 \qquad (\mathbf{1})$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq -1 \quad \wedge \quad 3x > 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq -1 \quad \wedge \quad x > 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [-1; +\infty) \cap (2; +\infty) = (2; +\infty)$$

Luego, el conjunto solución para **(1)** son los valores de $x \in (2; +\infty)$.

$\boldsymbol{S_1} = (\mathbf{2}; +\infty)$.

- Segundo caso

$$x + 1 \leq 0 \quad \wedge \quad 3x - 6 < 0 \qquad (\mathbf{2})$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \wedge \quad 3x < 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \wedge \quad x < 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cap (-\infty; 2) = (-\infty; -1]$$

Luego, el conjunto solución para **(2)** son los valores de $x \in (-\infty; -1]$.

$\mathbf{S_2} = (-\infty; -1]$

Como puede ocurrir que $x \in \mathbf{S_1}$ ó $x \in \mathbf{S_2}$, la solución es la unión de ambos intervalos. De aquí se deduce que el conjunto A inicialmente pedido es:

$\boldsymbol{A} = (-\infty; -\mathbf{1}] \cup (\mathbf{2}; +\infty)$

1. Expresar la factorización de un polinomio $\boldsymbol{P}$ de grado 3 que tenga por raíz doble a $x = 2$, por raíz simple a $x = -3$, y sabiendo que además $P(0) = 24$.

Solución y comentarios

El polinomio tiene en $x = 2$ una raíz doble y en $x = -3$ una raíz simple. Como el grado del polinomio es 3 no puede tener más raíces que las mencionadas, pues la suma de sus multiplicidades es 3.

Por lo tanto

$$P(x) = k(x-2)(x-2)(x-(-3))$$
$$P(x) = k(x-2)^2(x+3)$$

Solo falta determinar el valor de la constante "k". Sabemos que $P(0) = 24$, entonces:

$$P(0) = 24$$
$$k(0-2)^2(0+3) = 24$$
$$12k = 24$$
$$k = 2$$

El polinomio es:

$$\boldsymbol{P(x) = 2(x-2)^2(x+3)}$$

2. Representar en la recta numérica y escribir como unión de intervalos el conjunto:

$$A = \{x \in R : |2 + x| < 6 \ \wedge \ 3x + 2 \geq 5\}$$

Solución y comentarios

Debemos hallar los valores de $x \in R$ que verifican, al mismo tiempo que, $|2 + x| < 6$ y que $3x + 2 \geq 5$.

Pedir que $|2 + x| < 6$ es equivalente a pedir que:

$$-6 < 2 + x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 2 < x < 6 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -8 < x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-8; 4)$$

Es decir, el conjunto solución de $|2 + x| < 6$ es:

$$S_1 = (-8; 4)$$

La segunda condición que se debe satisfacer es equivalente a:

$$3x + 2 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq 5 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1; +\infty)$$

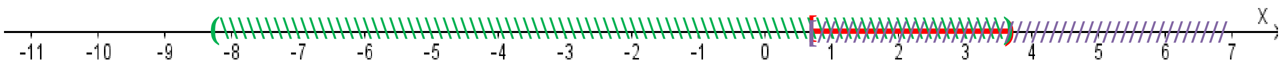
Es decir, el conjunto solución de $3x + 2 \geq 5$ es:

$$S_2 = [1; +\infty)$$

Por lo tanto, para que se cumplan ambas condiciones al mismo tiempo, debe cumplirse que:

$$x \in S_1 \cap S_2 = (-8; 4) \cap [1; +\infty) = [1; 4)$$

La representación gráfica del intervalo es:



3. Sea $\boldsymbol{f}$ una función lineal ($f(x) = ax + b$) que cumple con que $f(2) = 8$ y $f(-1) = -1$.
Sea $g(x) = x^3$. Hallar analíticamente el conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

Solución y comentarios

Primero hay que hallar la función lineal $f(x)$. Sabemos que $f(2) = 8$ y $f(-1) = -1$, entonces:

$$f(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (2) + b = 8$$
$$f(-1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (-1) + b = -1$$

Es decir

$$2a + b = 8$$
$$-1a + b = -1$$

De la segunda ecuación se obtiene que

$$b = -1 + a$$

Reemplazando en la primer ecuación el valor de "b":

$$2a + (-1 + a) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 3}$$

Entonces,

$$b = -1 + a = -1 + 3 = 2, \quad \boldsymbol{b = 2}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = 3x + 2$$

Debemos hallar analíticamente el conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = (3x + 2)^3.$$

La función $(3x + 2)^3$ tomará valores positivos si y solo si

$$3x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

El conjunto de positividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$ es:

$$C^+ = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Otra manera

Sabemos que la función $(g \circ f)(x) = (3x + 2)^3$ se anula en $x = -\frac{2}{3}$. Puede analizarse el signo de $(3x + 2)^3$ en los intervalos $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ y $(-\frac{2}{3}; +\infty)$. De estos dos intervalos nos interesa aquel donde $(3x + 2)^3$ toma valores positivos. Es decir:

- $-1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ $\quad (3 \cdot (-1) + 2)^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad (3x + 2)^3 < 0$ en el intervalo $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$
- $1 \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ $\quad (3 \cdot 1 + 2)^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad (3x + 2)^3 > 0$ en el intervalo $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

4. Encontrar analíticamente el conjunto de valores de $x \in R$ tal que la distancia desde el punto $A = (2; 2)$ al punto $B = (x; 1)$ sea mayor que $\sqrt{5}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (2; 2)$, $B = (x; 1)$ y $d(A; B) > \sqrt{5}$, entonces:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (1-2)^2} > \sqrt{5}$$
$$(x-2)^2 + (1-2)^2 > 5$$
$$x^2 + 2 \cdot (-2) \cdot x + (-2)^2 + 1 > 5$$
$$x^2 - 4x + 5 > 5$$
$$x^2 - 4x > 5 - 5$$
$$x^2 - 4x > 0$$
$$x(x-4) > 0$$

El producto será mayor que cero sí:

$$x > 0 \;\wedge\; x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \;\wedge\; x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (4; +\infty)$$

O bien si

$$x < 0 \;\wedge\; x - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \;\wedge\; x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0)$$

La distancia entre los puntos será mayor que $\sqrt{5}$ si $x \in (4; +\infty)$, o sí $x \in (-\infty; 0)$.

Es decir, $\boldsymbol{x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)}$.

<u>Otra manera de hallar el conjunto solución</u>

Sabemos que la cuadrática $\boldsymbol{x(x-4)}$ se anula en $x = 0$ y en $x = 4$.

Puede analizarse el signo de $\boldsymbol{x(x-4)}$ en los intervalos $(-\infty; 0); (0; 4)\ y\ (4; +\infty)$. De todos estos intervalos interesan aquellos donde $\boldsymbol{x(x-4)}$ tome valores positivos.

1. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 2$; $g(x) = -4x^2 + 16x - 12$, hallar analíticamente el o los puntos de intersección de ambas funciones

Solución y comentarios

Primero debemos plantear la ecuación $f(x) = g(x)$ para hallar el o los valores de la abscisa del punto de intersección.

$$f(x) = g(x)$$
$$2x - 2 = -4x^2 + 16x - 12$$
$$2x - 2 + 4x^2 - 16x + 12 = 0$$
$$4x^2 - 14x + 10 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 4, b = -14$ y $c = 10$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (10)}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 160}}{8} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{14 \pm 6}{8}$$

$$x_1 = \frac{14 + 6}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{14 - 6}{8} = 1$$

Si $x_1 = \frac{5}{2}$ el valor de la ordenada es $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 3$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$

Si $x_2 = 1$ el valor de la ordenada es $f(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$. En este caso el punto de intersección es el $P_2 = (1; 0)$

Las funciones se cruzan en los puntos

$$P_1 = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$$

$$P_2 = (1; 0)$$

2. Hallar analíticamente el o los valores de $h \in R$, para que la distancia entre $A = (-h\,;3)$ y $B = (1; 2h + 1)$ sea igual a $\sqrt{13}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (-h; 3)$, $B = (1; 2h + 1)$ y $d(A; B) = \sqrt{13}$, entonces

$$\sqrt{(1-(-h))^2 + (2h+1-3)^2} = \sqrt{13}$$
$$\sqrt{(1+h)^2 + (2h-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$(1+h)^2 + (2h-2)^2 = 13$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado y trabajamos algebraicamente:

$$1 + 2h + h^2 + 4h^2 - 8h + 4 = 13$$
$$5h^2 - 6h + 5 = 13$$
$$5h^2 - 6h + 5 - 13 = 0$$
$$5h^2 - 6h - 8 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo $a = 5, b = -6$ y $c = -8$.

$$h_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (5) \cdot (-8)}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10}$$
$$h_1 = \frac{6 - 14}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$
$$h_2 = \frac{6 + 14}{10} = 2$$

Los valores de h que hacen que la distancia ente los puntos $A\ y\ B$ sea igual a $\sqrt{13}$ son:

$$h_1 = -\frac{4}{5}$$
$$h_2 = 2$$

.

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = 2x - 1$, hallar el o los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = f\big(g(x)\big) = 0$

Solución y comentarios

Lo primero que debemos hacer es encontrar la función $h(x)$. Sabemos que $h(x) = f(g(x))$ y que $g(x) = 2x - 1$, entonces:

$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 3(2x - 1)$

Como nos piden hallar los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = 0$, igualamos la función obtenida a cero.

Es decir:

$$(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) = 0$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, aplicamos propiedad distributiva y operamos algebraicamente de la siguiente manera:

$$(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (-1) + (-1)^2 - 6x + 3 = 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 - 6x + 3 = 0$$
$$4x^2 - 10x + 4 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 4, b = -10$ y $c = 4$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (4)}}{2 \cdot 4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{8} = \frac{10 \pm 6}{8}$$

$$x_1 = \frac{10 + 6}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{10 - 6}{8} = \frac{1}{2}$$

Los valores donde se anula la función $h(x)$ son: $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

<u>Otra manera de encontrar los ceros o raíces de la función *h*:</u>

$(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) = 0$

Sacando factor común $(2x - 1)$:

$$(2x - 1)[(2x - 1) - 3] = 0$$

$$(2x - 1)[2x - 4] = 0 \iff 2x - 1 = 0 \text{ ó } 2x - 4 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ó } x = 2$$

4. Sea $\boldsymbol{y_1 = 5x - 1}$, hallar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$que pasa por el punto $(-1\,;\,-2)$. Hallar analíticamente el conjunto de negatividad C^- de la recta obtenida.

Solución y comentarios

En este ejercicio necesitamos conocer en primer lugar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(-1;-2)$.

Sea $\boldsymbol{y_2 = mx + b}$ la ecuación de la recta que buscamos.

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Por lo tanto la pendiente de la recta $\boldsymbol{y_2}$ vale 5.

Entonces,

$$\boldsymbol{y_2 = 5x + b}$$

La recta $\boldsymbol{y_2}$ pasa por el punto $(-1;-2)$. Esto nos indica que si reemplazamos el valor de x en la ecuación de la recta $\boldsymbol{y_2}$ por -1, el valor de y_2 que obtendremos será -2:

$$-2 = 5\cdot(-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad -2 = -5 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$$

La ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ es:

$$\boldsymbol{y_2 = 5x + 3}$$

Como se pide el conjunto de negatividad debemos encontrar los valores de $x \in R$ para los cuales $\boldsymbol{y_2} < 0$. Esto es lo mismo que pedir:

$$5x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$$

El conjunto buscado es el intervalo $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$.

1. Hallar analíticamente el o los valores de $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$ tal que $|-2a+3| < 3$.

Solución y comentarios

Por tratarse de una inecuación en la que interviene el módulo, debemos aplicar la propiedad correspondiente:

Para que $|-2a+3| < 3$, debe ocurrir:

$$-3 < -2a + 3 < 3$$

Por lo tanto, desdoblamos la inecuación planteada en dos partes:

$-3 < -2a + 3$ y $-2a + 3 < 3$

$2a < 3 + 3$ $\qquad -2a < 3 - 3$

$2a < 6$ $\qquad a > 0 : (-2)$

$a < 3$ $\qquad a > 0$

Deben ocurrir las dos cosas simultáneamente:

$a < 3 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 3)$ y $a > 0 \Leftrightarrow a \in (0; +\infty)$

El conjunto solución es:

$$S = (-\infty; 3) \cap (0; +\infty) = (0; 3)$$

Otra manera de resolver la inecuación:

$$|-2a+3| < 3$$

$$-3 < -2a + 3 < 3$$

$$-3 - 3 < -2a < 3 - 3$$

$$-6 < -2a < 0 \qquad \textit{dividiendo los términos de la inecuación por } (-2)$$

$$3 > a > 0 \qquad \textit{que es equivalente a}$$

$$0 < a < 3$$

2. Hallar $\boldsymbol{f^{-1}}$ siendo $f(x) = \sqrt{x+4} + 7$. Calcular el dominio de cada una de las funciones.

Solución y comentarios

Para empezar, debemos calcular el dominio de $\boldsymbol{f}$. Al intervenir una raíz cuadrada, se debe cumplir que:

$$x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4$$

Entonces:

$$\boldsymbol{Dom\ (f) = [-4; +\infty)}$$

Como nos piden calcular la función inversa de $\boldsymbol{f}$ debemos calcular cual es el conjunto imagen de dicha función.

El primer término de la función $\left(\sqrt{x+4}\right)$ admitirá valores mayores o iguales que cero, es decir,

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+4} + 7 \geq 7$$

Por lo tanto, para todo $x \in \boldsymbol{Dom\ f}$, tenemos que

$$f(x) = \sqrt{x+4} + 7 \geq 7$$

El **<u>conjunto Imagen</u>** de la función es:

$$\boldsymbol{Im\ (f) = [7; +\infty)}$$

Continuamos buscando la solución de $\boldsymbol{f(x) = y}$ para todo $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{7}; +\infty)$:

$$\sqrt{x+4} + 7 = y$$
$$\sqrt{x+4} = y - 7$$
$$x + 4 = (y-7)^2$$
$$x = (y-7)^2 - 4$$

De esta manera:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = (x-7)^2 - 4}$$

El dominio de la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ coincidirá con la imagen de la función $\boldsymbol{f}$, es decir,

$$\boldsymbol{Dom\ f^{-1} = [7; +\infty)}$$

3. Dadas las funciones $f(x) = x - \frac{9}{4}$; $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, hallar $(\boldsymbol{f \circ g})$ y $(\boldsymbol{g \circ f})$.

   Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función $(\boldsymbol{f \circ g})$

Solución y comentarios

Primero hallamos las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(x - \frac{9}{4}\right) = \left(x - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$

Para hallar los valores de $x \in R$ para que $(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ planteamos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Entonces,

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

o bien

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

El conjunto de ceros de la función $(f \circ g)$ es $C_0 = \{1; -2\}$

4. Hallar $A = \left\{x \in R, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$, sabiendo que $f(x) = 2x - 2$ y $g(x) = x - 3$.
(Aclaración: para resolver el ejercicio no pasar multiplicando la función g(x))

Solución y comentarios

Los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ son los valores de $x \in R$ que son solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2x-2}{x-3} \geq 0$$

Notar que el denominado nunca podrá tomar el valor $x = 3$.

Para que el cociente resulte mayor o igual que cero, existen dos posibilidades:

- Primer caso:

$$2x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0 \qquad (\mathbf{1})$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x \geq 2 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [1; +\infty) \cap (3; +\infty) = (3; +\infty)$$

Luego, el conjunto solución para **(1)** son los valores de $x \in (3; +\infty)$.

$\boldsymbol{S_1} = (\mathbf{3}; +\infty)$.

- Segundo caso

$$2x - 2 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 3 < 0 \qquad (\mathbf{2})$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x \leq 2 \quad \wedge \quad x < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 1 \quad \wedge \quad x < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 1] \cap (-\infty; 3) = (-\infty; 1]$$

Luego, el conjunto solución para **(2)** son los valores de $x \in (-\infty; 1]$.

$\mathbf{S_2} = (-\infty; 1]$

Como puede ocurrir que $x \in \mathbf{S_1}$ ó $x \in \mathbf{S_2}$, el conjunto que se busca es la unión de ambos intervalos. De aquí se deduce que el conjunto $\boldsymbol{A}$ inicialmente pedido es:

$$\boldsymbol{A} = (-\infty; \mathbf{1}] \cup (\mathbf{3}; +\infty)$$

1. Expresar la factorización de un polinomio $Q(x)$ de grado 3 que tenga por raíz doble a $x = 3$ y por raíz simple a $x = -5$, sabiendo que además $Q(0) = 90$.

Solución y comentarios

El polinomio tiene en $x = 3$ una raíz doble y en $x = -5$ una raíz simple. Como el grado del polinomio es 3 no puede tener más raíces que las mencionadas, pues la suma de sus multiplicidades es 3.

Por lo tanto

$$Q(x) = k(x-3)(x-3)(x-(-5))$$
$$Q(x) = k(x-3)^2(x+5)$$

Solo falta determinar cuanto vale la constante "k". Sabemos que $Q(0) = 90$, entonces:

$$Q(0) = 90$$
$$k(0-3)^2(0+5) = 90$$
$$45k = 90$$
$$k = 2$$

El polinomio es:

$$\boldsymbol{Q(x) = 2(x-3)^2(x+5)}$$

2. Representar en la recta numérica y escribir como unión de intervalos el conjunto:

$$A = \{x \in R : 2x + 3 > 9 \ \wedge \ |x + 3| \leq 8 \ \}$$

Solución y comentarios

Debemos hallar los valores de $x \in R$ que verifican, al mismo tiempo que, $2x + 3 > 9$ y que $|x + 3| \leq 8$.

De la primera condición se deduce que:

$$2x + 3 > 9 \iff 2x > 9 - 3 \iff 2x > 6 \iff x > 3 \iff x \in (3; +\infty)$$

Es decir, el conjunto solución de $2x + 3 > 9$ es:

$$S_1 = (3; +\infty)$$

Pedir que $|x + 3| < 8$ es equivalente a pedir que:

$$-8 \leq x + 3 \leq 8 \iff -8 - 3 \leq x \leq 8 - 3 \iff -11 \leq x \leq 5 \iff x \in [-11; 5]$$

Es decir, el conjunto solución de $|x + 3| \leq 8$ es:

$$S_2 = (-11; 5)$$

Por lo tanto, para que se cumplan ambas condiciones al mismo tiempo, los valores posibles para x son:

$$x \in S_1 \cap S_2 = (3; +\infty) \cap [-11; 5] = (3; 5]$$

La representación gráfica del intervalo es:

3. Encontrar analíticamente el conjunto de valores de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ tal que la distancia desde el punto $A = (3; x)$ al punto $B = (1; 3)$ sea mayor que $\sqrt{13}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En este problema $A = (3; y)$, $B = (1; 3)$, $d(A; B) > \sqrt{13}$, entonces:

$$\sqrt{(1-3)^2 + (3-x)^2} > \sqrt{13}$$
$$(-2)^2 + (3-x)^2 > 13$$
$$4 + (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + (3)^2 > 13$$
$$x^2 - 6x + 13 > 13$$
$$x^2 - 6x > 13 - 13$$
$$x^2 - 6x > 0$$
$$x(x-6) > 0$$

El producto será mayor que cero sí:

$$x > 0 \quad \wedge \quad x - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (6; +\infty)$$

O bien si

$$x < 0 \quad \wedge \quad x - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \wedge \quad x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 0)$$

La distancia entre los puntos será mayor que $\sqrt{13}$ si $x \in (6; +\infty)$, o sí $x \in (-\infty; 0)$.

Es decir,

$$x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$$

Otra manera

Sabemos que la cuadrática $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{6})$ se anula en $x = 0$ y en $x = 6$. Puede analizarse el signo de $x(x-6)$ en los intervalos $(-\infty; 0); (0; 6)$ y $(6; +\infty)$. De todos estos intervalos interesan aquellos donde $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{6})$ tome valores positivos.

4. Sea **“f”** una función lineal ($f(x) = ax + b$) que cumple con que $f(-1) = 2$ y $f(3) = 10$.
Sea $g(x) = x^3$. Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

Solución y comentarios

Primero hay que hallar la función lineal $f(x) = ax + b$. Sabemos que $f(-1) = 2$ y $f(3) = 10$, entonces:

$$f(-1) = 2 \iff a \cdot (-1) + b = 2$$

$$f(3) = 10 \iff a \cdot (3) + b = 10$$

Es decir

$$-a + b = 2$$

$$3a + b = 10$$

De la primera ecuación se obtiene que

$$b = 2 + a$$

Reemplazando en la segunda ecuación el valor de “b”:

$$3a + (2 + a) = 10 \iff 4a + 2 = 10 \iff 4a = 8 \iff \boldsymbol{a = 2}$$

Entonces

$$b = 2 + a = 2 + 2 = 4, \quad \boldsymbol{b = 4}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = 2x + 4$$

Debemos hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 4) = (2x + 4)^3.$$

La función $(g \circ f)(x) = (2x + 4)^3$ tomará valores negativos si y solo si

$$2x + 4 < 0 \iff 2x < -4 \iff x < -2 \iff x \in (-\infty; -2)$$

El conjunto de negatividad de la función $(g \circ f)$ es:

$$C^- = (-\infty; -2)$$

Otra manera

Sabemos que la función $(g \circ f)(x) = (2x + 4)^3$ se anula en $x = -2$. Puede analizarse el signo de $(2x + 4)^3$ en los intervalos $(-\infty; -2)$ y $(-2; +\infty)$. De estos dos intervalos nos interesa aquel donde $(2x + 4)^3$ toma valores negativos. Es decir:

- $-3 \in (-\infty; -2)$ $\quad (2 \cdot (-3) + 4)^3 = -8 \quad \Rightarrow \quad (2x + 4)^3 < 0$ en el intervalo $(-\infty; -2)$
- $1 \in (2; +\infty)$ $\quad (2 \cdot 1 + 4)^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad (2x + 4)^3 > 0$ en el intervalo $(2; +\infty)$

1. Hallar analíticamente los valores de $h \in R$, para que la distancia entre $A = (h-3\,;3)$ y $B = (2;2h)$ sea igual a $\sqrt{10}$.

Solución y comentarios

Recordemos que si $A = (x_1; y_1)$ y$B = (x_2; y_2)$, la distancia entre ambos puntos se calcula como

$d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En este problema $A = (h-3;3)$, $B = (2;2h)$ y $d(A;B) = \sqrt{10}$, entonces

$$\sqrt{(2-(h+3))^2 + (2h-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\sqrt{(-1-h)^2 + (2h-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$(-1-h)^2 + (2h-3)^2 = 10$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado y trabajamos algebraicamente:

$$1 + 2h + h^2 + 4h^2 - 12h + 9 = 10$$
$$5h^2 - 10h + 10 = 10$$
$$5h^2 - 10h + 10 - 10 = 0$$
$$5h^2 - 10h = 0$$
$$h(5h - 10) = 0$$

El producto dará cero $\Leftrightarrow$ $h = 0$ $,ó\ si,$ $h = 2$

Los valores de h que hacen que la distancia ente los puntos $A\ y\ B$ sea igual a $\sqrt{10}$ son:

$h_1 = 0$

$h_2 = 2$

2. Sabiendo que $f(x) = -4x + 5$ y $g(x) = -3x^2 - 5x + 7$, hallar analíticamente el o los puntos de intersección de ambas funciones.

Solución y comentarios

Primero debemos plantear la ecuación $f(x) = g(x)$ para hallar el o los valores de la abscisa del punto de intersección.

$$f(x) = g(x)$$

$$-4x + 5 = -3x^2 - 5x + 7$$

$$-4x + 5 + 3x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 3, b = 1$ y $c = -2$.

$$x_{1,2} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{6} = -1$$

Si $x_1 = \frac{2}{3}$ el valor de la ordenada es $f\left(\frac{2}{3}\right) = -4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = \frac{7}{3}$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Si $x_1 = -1$ el valor de la ordenada es $f(-1) = -4 \cdot (-1) + 5 = 9$. En este caso el punto de intersección es el $P_1 = (-1; 9)$

Las funciones se cruzan en los puntos

$$P_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$P_2 = (-1; 9)$$

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x - 1$, hallar el o los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = f\left(g(x)\right) = 0$.

Solución y comentarios

Lo primero que debemos hacer es encontrar la función $h(x)$. Sabemos que $h(x) = f(g(x))$ y que $g(x) = 3x - 1$, entonces:

$h(x) = f\left(g(x)\right) = f(3x-1) = (3x-1)^2 - 2(3x-1)$

Como nos piden hallar los valores de $x \in R$ tales que $h(x) = 0$, igualamos la función obtenida a cero.

Es decir:

$$(3x-1)^2 - 2(3x-1) = 0$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, aplicamos propiedad distributiva y operamos algebraicamente de la siguiente manera:

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (-1) + (-1)^2 - 6x + 2 = 0$$
$$9x^2 - 6x + 1 - 6x + 2 = 0$$
$$9x^2 - 12x + 3 = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 9, b = -12$ y $c = 3$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (9) \cdot (3)}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{18} = \frac{12 \pm 6}{18}$$
$$x_1 = \frac{12+6}{18} = 1$$
$$x_2 = \frac{12-6}{18} = \frac{1}{3}$$

Los valores donde se anula la función $\boldsymbol{h}$ son:

$$x_1 = 1 \,,\, x_2 = \frac{1}{3}$$

<u>**Otra manera de encontrar los ceros o raíces de la función $\boldsymbol{h}$**:</u>

$(3x-1)^2 - 2(3x-1) = 0$

Sacando factor común $(3x-1)$:

$$(3x-1) \cdot [(3x-1) - 2] = 0$$
$$(3x-1) \cdot [3x-3] = 0 \Leftrightarrow \quad 3x - 1 = 0 \text{ ó } 3x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \text{ ó } x = 1$$

4. Sea $\boldsymbol{y_1 = -4x + 2}$, hallar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(2; 3)$.
   Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la recta obtenida.

Solución y comentarios

En este ejercicio necesitamos conocer en primer lugar la ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ que pasa por el punto $(2; 3)$.

Sea $\boldsymbol{y_2 = mx + b}$ la ecuación de la recta que buscamos.

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Por lo tanto la pendiente de la recta $\boldsymbol{y_2}$ vale -4.

Entonces,

$$\boldsymbol{y_2 = -4x + b}$$

La recta $\boldsymbol{y_2}$ pasa por el punto $(2; 3)$. Esto nos indica que si reemplazamos el valor de $\boldsymbol{x \in R}$ en la ecuación de la recta $\boldsymbol{y_2}$ por 2, el valor de $\boldsymbol{y_2}$ que obtendremos será 3:

$$3 = -4 \cdot (2) + b \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -8 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 11$$

La ecuación de la recta paralela a $\boldsymbol{y_1}$ es:

$$\boldsymbol{y_2 = -4x + 11}$$

Como se pide el conjunto de negatividad debemos encontrar los valores de $x \in R$ para los cuales $\boldsymbol{y_2} < 0$. Esto es lo mismo que pedir:

$$-4x + 11 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x < -11 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{11}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$$

El conjunto buscado es el intervalo $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$

1. Hallar $\boldsymbol{f^{-1}}$ siendo $f(x) = \sqrt{x+1} - 9$. Calcular el dominio de cada una de las funciones.

Solución y comentarios

Para empezar, debemos calcular el dominio de $\boldsymbol{f}$. Al intervenir una raíz cuadrada, se debe cumplir que:

$$x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

Entonces:

$$\boldsymbol{Dom\ (f) = [-1; +\infty)}$$

Como nos piden calcular la función inversa de $\boldsymbol{f}$ debemos calcular cual es el conjunto imagen de dicha función.

El primer término de la función $\left(\sqrt{x+1}\right)$ admitirá valores mayores o iguales que cero, es decir,

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+1} - 9 \geq -9$$

Por lo tanto, para todo $x \in \boldsymbol{Dom\ f}$, tenemos que

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 9 \geq -9$$

El **conjunto Imagen** de la función es:

$$\boldsymbol{Im\ (f) = [-9; +\infty)}$$

Continuamos buscando la solución de $\boldsymbol{f(x) = y}$ para todo $\boldsymbol{y} \in [-\boldsymbol{9}; +\infty)$:

$$\sqrt{x+1} - 9 = y$$
$$\sqrt{x+1} = y + 9$$
$$x + 1 = (y+9)^2$$
$$x = (y+9)^2 - 1$$

De esta manera:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = (x+9)^2 - 1}$$

El dominio de la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ coincidirá con la imagen de la función $\boldsymbol{f}$, es decir,

$$\boldsymbol{Dom\ f^{-1} = [-9; +\infty)}$$

2. Hallar analíticamente el o los valores de $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ tal que $|5-2b| < 11$.

Solución y comentarios

Por tratarse de una inecuación en la que interviene el módulo, debemos aplicar la propiedad correspondiente:

Para que $|5-2b| < 11$, debe ocurrir:

$$-11 < 5-2b < 11$$

Por lo tanto, desdoblamos la inecuación planteada en dos partes:

$$-11 < 5-2b \quad \text{y} \quad 5-2b < 11$$

$$2b < 5+11 \qquad -2b < 11-5$$

$$2b < 16 \qquad b > 6:(-2)$$

$$b < 8 \qquad b > -3$$

Deben ocurrir las dos cosas simultáneamente:

$$b < 8 \iff b \in (-\infty; 8) \quad \wedge \quad b > -3 \iff b \in (-3; +\infty)$$

El conjunto solución es:

$$S = (-\infty; 8) \cap (-3; +\infty) = (-3; 8)$$

Otra manera de resolver la inecuación:

$$|5-2b| < 11$$

$$-11 < 5-2b < 11$$

$$-11-5 < -2b < 11-5$$

$$-16 < -2b < 6 \qquad \textit{dividiendo los términos de la inecuación por } (-2)$$

$$8 > b > -3 \qquad \textit{que es equivalente a}$$

$$-3 < b < 8$$

3. Hallar $A = \left\{x \in R, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$, sabiendo que $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 3x - 6$.
(Aclaración: para resolver el ejercicio no pasar multiplicando la función g(x))

Solución y comentarios

En primer lugar, por tratarse de un cociente de funciones, debemos considerar que $g(x) \neq 0$. Por lo tanto, $3x - 6 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \neq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

Luego, como $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, considerando las funciones dadas, los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ son los valores de $x \in R$ que son solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x+1}{3x-6} \geq 0$$

Para que el cociente resulte mayor o igual que cero, existen dos posibilidades:

- Primer caso:

$$\begin{array}{llll} & x + 1 \geq 0 & \wedge & 3x - 6 > 0 \qquad (\mathbf{1}) \\ \Leftrightarrow & x \geq -1 & \wedge & 3x > 6 \\ \Leftrightarrow & x \geq -1 & \wedge & x > 2 \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{3}{l}{x \in [-1; +\infty) \cap (2; +\infty) = (2; +\infty)} \end{array}$$

Luego, el conjunto solución para **(1)** son los valores de $x \in (2; +\infty)$.

$\boldsymbol{S_1} = (\mathbf{2}; +\infty)$.

- Segundo caso

$$\begin{array}{llll} & x + 1 \leq 0 & \wedge & 3x - 6 < 0 \qquad (\mathbf{2}) \\ \Leftrightarrow & x \leq -1 & \wedge & 3x < 6 \\ \Leftrightarrow & x \leq -1 & \wedge & x < 2 \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{3}{l}{x \in (-\infty; -1] \cap (-\infty; 2) = (-\infty; -1]} \end{array}$$

Luego, el conjunto solución para **(2)** son los valores de $x \in (-\infty; -1]$.

$\mathbf{S_2} = (-\infty; -1]$

Como puede ocurrir que $x \in \mathbf{S_1}$ ó $x \in \mathbf{S_2}$, la solución es la unión de ambos intervalos. De aquí se deduce que el conjunto A inicialmente pedido es:

$\boldsymbol{A} = (-\infty; -\mathbf{1}] \cup (\mathbf{2}; +\infty)$

4. Dadas las funciones $g(x) = x - \frac{49}{4}$; $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, hallar $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ y $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$.

   Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$

Solución y comentarios

Primero hallamos las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(x - \frac{49}{4}\right) = \left(x - \frac{49}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{45}{4}\right)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Para hallar los valores de $x \in R$ para que $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ planteamos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

Entonces,

$$x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

o bien

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

El conjunto de ceros de la función $(f \circ g)$ es $C_0 = \{3; -4\}$