Matemáticas UBA XXI – 1er Cuatrimestre 2021

Primera evaluación de carácter formativo

1. Si el gráfico de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1+4x}}{\mathbf{2x-1}}$ corta a los ejes coordenados en los puntos P y Q, entonces la distancia entre los puntos P y Q es:

Resolución:

- Corta al eje y cuando x=0: $f(0) = \frac{1+0}{0-1} = -1 \rightarrow P = (0;-1)$
- Corta al eje x cuando y=0: $1 + 4x = 0 \rightarrow 4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \rightarrow Q = \left(-\frac{1}{4};0\right)$
    - Nota: hay que asegurarse de que este valor pertenezca al dominio, el dominio es $\mathbb{R}$ menos los x que hagan cero al denominador. Esto se da para 2x=1 →x=1/2 solamente, por lo tanto, Q pertenece al dominio
- Distancia entre P y Q:

$$D(P;Q) = \sqrt{(-\frac{1}{4} - 0)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}: |2x-6| \leq 12\}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{1+|x|} < 1\right\}$, el conjunto $X = A \cap B$ es:

Resolución:

A.1: tomo el interior del || positivo, es decir, $2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3$

$2x - 6 \leq 12 \rightarrow 2x \leq 18 \rightarrow x \leq 9$, de esta condición y la anterior, $3 \leq x \leq 9$

A.2: tomo el interior del || negativo, es decir, 2x<6→x<3

$-(2x-6) \leq 12 \rightarrow 2x - 6 \geq -12 \rightarrow 2x \geq -6 \rightarrow x \geq -3$, de ésta y la anterior, $-3 \leq x < 3$

A: Uniendo los dos casos, $\boldsymbol{A = -3 \leq x \leq 9}$ (también podría haberse calculado en base a concepto de distancia usando ||)

B.1: tomo el interior del || positivo, es decir, $x \geq 0$

$\frac{3}{1+x} < 1 \rightarrow 3 < 1 + x \rightarrow x > 2$, de esta condición y la anterior, x>2

(notar que para x>0, 1+x siempre es positivo)

B.2: tomo el interior del || negativo, es decir, $x < 0$ (excepto x=-1, que no está en el dominio)

$\frac{3}{1-x} < 1 \rightarrow 3 < 1 - x \rightarrow 2 < -x \rightarrow x < -2$, de esta condición y la anterior, x<-2

(notar que para x<0, 1-x siempre es positivo)

B: Uniendo los dos casos, $\boldsymbol{B = (x < -2) \cup (x > 2)}$

Por lo tanto, $A \cap B = (-3 \leq x < -2) \cup (2 < x \leq 9) = [-3;-2) \cup (2;9]$

3. El o los valores de $b \in \mathbb{R}$: $|5-2b| < 11$ son:

Resolución:

Se puede calcular como en el anterior, o usar el concepto de distancia. Si se hace como distancia, |5-2b|=|2b-5| por propiedad del valor absoluto, y dividiendo toda la ecuación por 2 queda:

|b-5/2| < 11/2

quiere decir que el punto medio del segmento resultante es 5/2 y la distancia a los extremos es 11/2. Por lo tanto,

5/2-11/2 < x < 5/2+11/2 →

-6/2 < x < 16/2 →

-3 < x < 8 → $\boldsymbol{b \in (-3; 8)}$

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = -x + 3$, escribir como intervalo o unión de intervalos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que: f(x) ≥ g(x)}

Resolución:

$$x^2 + 2x - 1 \geq -x + 3$$

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0 \qquad (1)$$

Vamos a poner esta función factorizada para analizar el signo, para eso sacamos las raíces por Bhaskara:

$$x_{r1,r2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9 + 16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_{r1} = 1 \text{ y } x_{r2} = -4$$

Entonces (1) queda: $(x - 1)(x + 4) \geq 0 \qquad (2)$

Para que (2) sea positiva o cero hay dos opciones: o ambos factores son positivos, o ambos negativos.

Caso 1: $x - 1 \geq 0 \wedge x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \wedge x \geq -4 \rightarrow x \geq 1$

Caso 2: $x - 1 \leq 0 \wedge x + 4 \leq 0 \rightarrow x \leq 1 \wedge x \leq -4 \rightarrow x \leq -4$

El resultado es la unión de los dos: $(x \leq -4) \cup (x \geq 1) = x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$

5. Dada $f(x) = 3x + 7$ y sabiendo que $f(a-2) = 5$. ¿Cuál es el valor de a?

Resolución:

$$f(a-2) = 3(a-2) + 7 = 5$$

$$3a - 6 + 7 = 5$$

$$3a = 5 + 6 - 7 = 4$$

$$a = 4/3$$

6. El siguiente polinomio tiene las siguientes raíces: 0 (raíz simple); -1 (raíz simple); -2 (raíz doble) y -3 (raíz doble)

Respuesta:

$$P(x) = A(x-0)(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$
$$P(x) = Ax(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

En las respuestas aparece el caso de A=1, y aclara "es único" o "es no único". Sabemos que no es único, porque hay infinitos polinomios que cumplen el enunciado, ya que A puede ser cualquier real.

O sea que la respuesta correcta es: $P(x) = x(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$ y es no único

7. Decidir cuál es, o cuáles son, los valores de las abscisas de los puntos resultantes de la intersección de las funciones $f(x) = 2x - 2$ y $g(x) = -4x^2 + 16x - 12$

Resolución:

En la intersección ambas funciones valen lo mismo, o sea:

$$2x - 2 = -4x^2 + 16x - 12$$
$$4x^2 - 16x + 12 + 2x - 2 = 0$$
$$4x^2 - 14x + 10 = 0$$

Por Bhaskara:

$$x_{1,2} = +\frac{14}{8} \pm \frac{\sqrt{14^2 - 4\cdot 4\cdot 10}}{8} = \frac{14}{8} \pm \frac{\sqrt{196+160}}{8} = \frac{14}{8} \pm \frac{\sqrt{36}}{8} = \frac{14}{8} \pm \frac{6}{8} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} \text{ y } x_2 = 1$$

8. Los conjuntos de positividad y negatividad de la siguiente función $f(x) = x^2 - x - 12$ son:

Resolución:

Vamos a sacar las raíces por Bhaskara:

$$x_{r1,r2} = +\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_{r1} = -3 \text{ y } x_{r2} = 4$$
$$f(x) = (x+3)(x-4)$$

Podemos analizar el signo de (x-4) y (x+3) como en el ejercicio 4: cuando ambos son positivos o ambos negativos, la función será positiva, y si son de signos distintos, la función será negativa. O podemos usar otro método: como los polinomios son funciones continuas, no cambian de signo entre las raíces (una de las consecuencias del teorema de Bolzano). Entonces basta tomar valores de x antes y después de cada raíz:

$$f(-5) = (-2)(-9) = 18 > 0$$
$$f(0) = 3(-4) = -12 < 0$$
$$f(5) = 8\cdot 1 = 8 > 0$$

Por lo tanto:

$$C^+ = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$$
$$C^- = (-3; 4)$$

9. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-3}{x}$ y $g(x) = 5 - x$, la ecuación de $(f \circ g)^{-1}$ es…

Resolución:

Encontremos primero $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{g(x)-3}{g(x)}$ (reemplazamos x por g(x) en f(x))

Ahora reemplazamos g(x) por su valor:

$$y = (f \circ g)(x) = \frac{(5-x)-3}{(5-x)} = \frac{5-x-3}{5-x} = \frac{2-x}{5-x}$$

Y para encontrar la función inversa $(f \circ g)^{-1}$ tenemos que expresar x como función de y:

$$y = \frac{2-x}{5-x} \to y(5-x) = (2-x)$$

$$5y - xy = 2 - x$$

$$5y - xy - 2 + x = 5y - 2 + x(1-y) = 0$$

$$x(1-y) = 2 - 5y$$

$$x = \frac{2-5y}{1-y} = (f \circ g)^{-1}(y)$$

Finalmente lo expresamos en función de x:

$$(f \circ g)^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{2-5x}{1-x}$$

10. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{3a-x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que h(-1)=2, siendo h(x)=g(f(x))

Resolución:

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{2}{3a-x}} = \frac{3a-x}{2}$$

$$h(-1) = \frac{3a-(-1)}{2} = \frac{3a+1}{2} = 2$$

$$3a + 1 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$