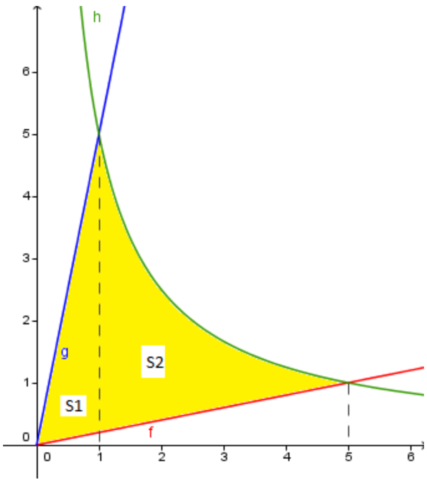
1. Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de las funciones

$$f(x) = \frac{x}{5}\ ;\ \ g(x) = 5x\ ;\ \ h(x) = \frac{5}{x}$$

del primer cuadrante (es decir, la región del plano donde $x \geq 0, y \geq 0$).

Solución



Primero vamos a hallar las abscisas de los puntos donde se cortan las funciones.

$g(x) = h(x) \iff 5x = \frac{5}{x} \iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff \boldsymbol{x = 1}$ ó $\boldsymbol{x = -1}$

Como estamos en el primer cuadrante nos quedamos con la respuesta $\boldsymbol{x = 1}$

$f(x) = h(x) \iff \frac{x}{5} = \frac{5}{x} \iff x^2 = 25 \iff \boldsymbol{x = 5}$ ó $\boldsymbol{x = -5}$

Como estamos en el primer cuadrante nos quedamos con la respuesta $\boldsymbol{x = 5}$

$$\text{Área encerrada por las gráficas} = \text{Área región } S1 + \text{Área región } S2$$

$$\text{Área región } S1 = \int_0^1 \left(5x - \frac{x}{5}\right) dx = \int_0^1 \frac{24}{5} x\ dx = \frac{24}{10} x^2 \Big|_0^1 = \frac{24}{10}$$

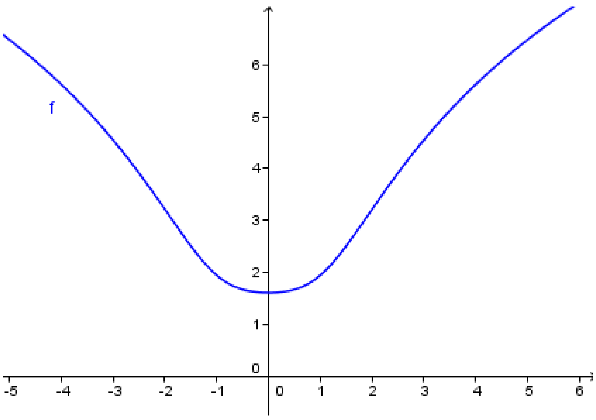
$$\text{Área región } S2 = \int_1^5 \left(\frac{5}{x} - \frac{x}{5}\right) dx = \left(5\ln(x) - \frac{x^2}{10}\right)\Big|_1^5 = \left(5\ln(5) - \frac{5^2}{10}\right) - \left(5\ln(1) - \frac{1^2}{10}\right) = 5\ln(5) - \frac{24}{10}$$

$$\text{Área encerrada por las gráficas} = \frac{24}{10} + 5\ln(5) - \frac{24}{10} = 5\ln(5)$$

El área de la región encerrada por las gráficas de las funciones del primer cuadrante es $5\ln(5)$.

2. Hallar los máximos y/o mínimos de la función $f(x) = \ln(5 + x^2 + x^4)$

Solución



En primer lugar, para hallar los extremos relativos de una función, debemos hallar su derivada. Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena, determinamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{5 + x^2 + x^4} \cdot (2x + 4x^3) = \frac{2x(1 + 2x^2)}{5 + x^2 + x^4}$$

El dominio de f' es el conjunto de todos los números reales.

Para hallar los extremos relativos debemos ver para que valores la derivada primera se anula.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x(1 + 2x^2)}{5 + x^2 + x^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1 + 2x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

ya que $(1 + 2x^2) > 0$ para todo valor de x.

La función f' se anula si $x = 0$

Para determinar si la función tiene un extremo relativo cuando $x = 0$ debemos analizar que sucede en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$

- En $(-\infty; 0)$ la función es decreciente ya que $f'(-1) = -12 < 0$
- En $(0; +\infty)$ la función es creciente ya que $f'(1) = 12 > 0$

El punto $(0; f(0))$ es un mínimo relativo de la función.

<u>Nota:</u>

Se puede utilizar el criterio de la derivada segunda para decidir si el punto con abscisa $x = 0$ es un mínimo.

3. Hallar la distancia entre el vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ y el vértice de la parábola $y = ax^2 - x + 2$ que se sabe pasa por el punto $P = (1; -2)$.

Solución

El vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ es $V_1 = (3; -5)$

La parábola $y = ax^2 - x + 2$ pasa por el punto $P = (1; -2)$, entonces

$$-2 = a(1)^2 - 1 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = a + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$$

y por lo tanto

$$y = -3x^2 - x + 2$$

La abscisa del vértice de esta parábola es

$$x_v = \frac{-(-1)}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$$

Entonces

$$y_v = -3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 2 = \frac{25}{12}$$

Por lo tanto, el vértice de la parábola $y = -3x^2 - x + 2$ es $V_2 = \left(-\frac{1}{6}; \frac{25}{12}\right)$

Finalmente debemos hallar la distancia entre los puntos V_1 y V_2.

$$d(V_1; V_2) = \sqrt{(V_{2x} - V_{1x})^2 + \left(V_{2y} - V_{1y}\right)^2}$$

$$d(V_1; V_2) = \sqrt{\left(-\frac{1}{6} - 3\right)^2 + \left(\frac{25}{12} - (-5)\right)^2}$$

$$d(V_1; V_2) = \sqrt{\left(-\frac{19}{6}\right)^2 + \left(\frac{85}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{36} + \frac{7225}{144}} = \sqrt{\frac{1444 + 7225}{144}} = \sqrt{\frac{8669}{144}}$$

---

4. Hallar el dominio y el conjunto de ceros de la función $f(x) = x - \sqrt{18 - 2x^2}$.

Solución

La función está bien definida siempre y cuando el argumento de la raíz cuadrada sea un número mayor o igual a cero. Entonces debemos pedir que:

$$0 \le 18 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \le 18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3; 3]$$

Luego

$$Dom(f) = [-3; 3]$$

Ahora vamos a hallar el conjunto de ceros de la función

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \sqrt{18 - 2x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{18 - 2x^2} = x$$

La última ecuación nos dice que el o los valores de x que buscamos deben ser números mayores o iguales a cero.

Entonces

$$\sqrt{18 - 2x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{18 - 2x^2}\right)^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 18 - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{6}$$

Luego,

$$C^0(f) = \{\sqrt{6}\}$$