



Matemática

Clave de corrección primer parcial

Primer turno – Tema 2 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar, si existe, el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}ax + 3$ y la recta que pasa por los puntos $P = (3; 3)$ y $Q = (6; 5)$ sean paralelas.

Primero hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (3; 3)$ y $Q = (6; 5)$. La ecuación de esta recta es de la forma $y = mx + b$.

Especializando en los puntos $P = (3; 3)$ y $Q = (6; 5)$ tenemos que:

$$3 = 3m + b$$

$$6 = 5m + b$$

Restando las ecuaciones llegamos a

$$-2 = -3m$$

$$\frac{2}{3} = m$$

Entonces,

$$3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + b \quad \leftrightarrow \quad 3 = 2 + b \quad \leftrightarrow \quad 1 = b$$

La ecuación de la recta es

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

Como las rectas deben ser paralelas, las pendientes deben ser iguales:

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a \quad \leftrightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$



Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función

$$g(x) = \frac{-bx}{x-4}$$

hallar los valores de la constante $b \in \mathbb{R}$ para que $g^{-1}(1) = 2b$

En primer término hallamos la función inversa de g .

Partiendo de

$$y = \frac{-bx}{x-4}$$

Despejamos la expresión de x :

$$y(x-4) = -bx$$

$$xy - 4y = -bx$$

$$xy + bx = 4y$$

$$x(y+b) = 4y$$

$$x = \frac{4y}{y+b}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$g^{-1}(x) = \frac{4x}{x+b}$$

Como $g^{-1}(1) = 2b$

$$2b = \frac{4 \cdot (1)}{(1) + b}$$

$$2b = \frac{4}{1+b}$$

$$(1+b) \cdot 2b = 4$$

$$2b^2 + 2b = 4$$

$$2b^2 + 2b - 4 = 0$$

$$b^2 + b - 2 = 0$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles: $b = 1$ y $b = -2$.

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $g^{-1}(1) = 2b$ entonces $g(g^{-1}(1)) = g(2b)$, pero como $g(g^{-1}(1)) = 1$ tenemos que



$$\begin{aligned}g(2b) &= 1 \\ \frac{-b(2b)}{2b-4} &= 1 \quad (b \neq 2) \\ -2b^2 &= 2b - 4 \\ -2b^2 - 2b + 4 &= 0 \\ b^2 + b - 2 &= 0\end{aligned}$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles: $b = 1$ y $b = -2$.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la ecuación y las raíces de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (1; -2)$ y pasa por el punto $(0; -\frac{3}{2})$

Si conocemos las coordenadas del vértice, la ecuación de la parábola la podemos expresar como

$$\begin{aligned}y &= a \cdot (x - 1)^2 + (-2) \\ y &= a \cdot (x - 1)^2 - 2\end{aligned}$$

Para hallar el valor de la constante "a" usamos la información de que pasa por el punto $(0; -\frac{3}{2})$:

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2} &= a \cdot (0 - 1)^2 - 2 \\ -\frac{3}{2} &= a - 2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola.

Como pasa por el punto $(0; -\frac{3}{2})$ tenemos que

$$-\frac{3}{2} = a(0)^2 + b(0) + c \quad \rightarrow \quad c = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx - \frac{3}{2}$$

La coordenada x del vértice se puede calcular como



$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow 1 = -\frac{b}{2a} \leftrightarrow b = -2a \rightarrow y = ax^2 - 2ax - \frac{3}{2}$$

Por último, para despejar el valor de la constante "a" usamos que

$$y_v = ax_v^2 - 2ax_v - \frac{3}{2}$$

$$-2 = a(1)^2 - 2a(1) - \frac{3}{2}$$

$$-2 = a - 2a - \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \therefore b = -1$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$C = \{x \in \mathbb{R} / (x - 3)^2 + 1 < 10\} \quad D = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 3x\right\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto $C \cap D$.

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto C :

$$(x - 3)^2 + 1 < 10$$

$$(x - 3)^2 < 9$$

$$\sqrt{(x - 3)^2} < \sqrt{9}$$

$$|x - 3| < 3$$

$$-3 < x - 3 < 3 \leftrightarrow 0 < x < 6 \rightarrow x \in (0; 6)$$

Por lo tanto, $B = (0; 6)$

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto D :

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 3x$$

$$2x + 1 > 3x$$

$$2x - 3x > -1$$

$$-x > -1 \leftrightarrow x < 1 \rightarrow x \in (-\infty; 1)$$

Por lo tanto, $D = (-\infty; 1)$

Entonces:

$$C \cap D = (0; 6) \cap (-\infty; 1) = (0; 1)$$

$$C \cap D = (0; 1)$$