APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar, si existe/en, la/las ecuación/es de las asíntotas verticales de $f(x)=\frac{x^3-2}{4-x^2}$

Para realizar un estudio de las asíntotas de una función es fundamental determinar el dominio de la misma. En el caso de la función f , al ser un cociente, debemos analizar para qué valores se anula el denominador:

$$4-x^2=0 \implies x^2=4 \implies |x|=2 \implies x=2 \ \vee \ x=-2$$

Por lo tanto:

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$$

Estos valores excluidos del dominio pueden ser los que correspondan a las asíntotas verticales, para determinar si lo son debemos evaluar el límite de la función cuando la variable se aproxima a dichos valores.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2}{4-x^2}=\infty \quad \implies \quad x=2 \ es \ Asíntota \ Vertical$$

Cuando la variable toma valores cercanos a 2, el numerador se aproxima a 6 y el denominador a 0, por lo tanto la función toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-2}{4-x^2}=\infty \quad \implies \quad x=-2 \ es \ Asíntota \ Vertical$$

Cuando la variable toma valores cercanos a -2, el numerador se aproxima a -10 y el denominador a 0, por lo tanto la función toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

Para analizar si la función tiene asíntota horizontal debemos evaluar el límite de la función cuando la variable toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{4-x^2}$$

Tanto numerador como denominador toman valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños, por lo tanto se presenta una indeterminación que debemos resolver, para ello dividimos numerador y denominador por x^2 :

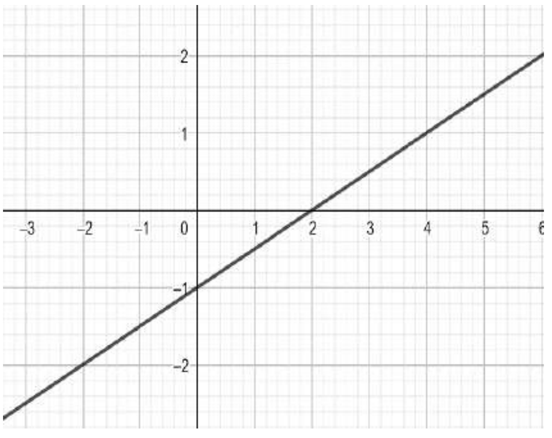
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-2}{x^2}}{\frac{4-x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-1}=\infty$$

Cuando la variable toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños, las expresiones $\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$ **y** $\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$ toman valores cercanos a $\mathbf{0}$, por lo tanto numerador tiende a ∞ y el denominador se aproximan a $-\mathbf{1}$, por esto el límite de la función es ∞.

De acuerdo a la definición, la función **no tiene Asíntota Horizontal**.

En este ejercicio trabajamos con la definición de Asíntota Vertical y Asíntota Horizontal.

2. Hallar la ecuación de la recta que corresponde a la siguiente gráfica:



Por tratarse de una función lineal resulta factible hallar su expresión conociendo las coordenadas de dos de los puntos que pertenecen a la gráfica.
En este caso, la recta viene dada de tal modo que pueden obtenerse dichos puntos a partir de la observación atenta del gráfico, eligiendo a tal fin un par de ellos que posean coordenadas enteras. En efecto, pueden elegirse dos de los siguientes: $(-2;-2)$, $(0;-1)$, $(2;0)$ y $(4;1)$.
Si bien podría resultar indistinto tomar dos cualesquiera, conviene empezar con el punto $(0;-1)$ y partir de la forma explícita teniendo en cuenta que la ordenada al origen es -1 (intersección con el eje de ordenadas)
Entonces,

$$f(x) = m.x + b \quad \textbf{(1)}$$

$$f(x) = m.x - 1 \quad \textbf{(2)}$$

Se llega al mismo resultado si se hace $f(0) = -1$ en **(1)** puesto que el punto $(0;-1)$ verifica la ecuación, es decir, cuando $x = 0$, $y = -1$.
Luego,

$$-1 = m.0 + b$$

Despejando b resulta,

$$b = -1$$

Para calcular la pendiente se considera alguno de los 3 puntos restantes, por ejemplo, el $(2;0)$ y se procede en forma análoga reemplazando en **(2)** para hallar el valor de m.
Entonces,

$$f(2) = 0$$

$$0 = m.2 - 1$$

Se hace el despeje correspondiente:

$$1 = 2m$$

$$m = \frac{1}{2}$$

En definitiva, la ecuación buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{2}.x - 1$$

Fácilmente puede comprobarse que los 4 puntos considerados verifican la ecuación.
Se le ha asignado un nombre a la función en este caso, llamándola f pero podría trabajarse directamente indicando la ecuación de la siguiente manera:

$$y = m.x + b$$

y la respuesta es:

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

3. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales $25x - 5x^2 > 0$. Expresar el conjunto obtenido como intervalo o unión de intervalos.

Una forma de resolver este ejercicio es la siguiente. Para resolver la desigualdad, factorizamos la expresión y usamos la regla de los signos:

$$25x - 5x^2 > 0$$

$$5x(5 - x) > 0$$

$$x(5 - x) > 0$$

Para que el producto sea positivo, ambos factores deben tener el mismo signo.

Caso 1: $x > 0$ y $5 - x > 0$. Esto es equivalente a $x > 0$ y $x < 5$, cuya solución es el intervalo $(0,\ 5)$.

Caso 2: $x < 0$ y $5 - x < 0$. Esto es equivalente a $x < 0$ y $x > 5$, pero como no hay ningún valor de x que cumpla con ambas condiciones en simultaneo, la solución de este caso es el conjunto vacío (no hay solución).

Luego, la solución final a la ecuación original es la unión de las soluciones halladas en cada caso, y por lo tanto la misma es $S = (0,\ 5)$.

4. Hallar el conjunto de positividad de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-2}{x\,(x-1)}}$

En primer lugar, hallamos el dominio de la función f para conocer el conjunto de puntos donde la misma está definida y sobre el cual vamos a trabajar. Para esto, notamos que la única restricción que presenta esta función es que su denominador no debe anularse. Los valores de x donde el denominador se anula son

$$x.(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad o\ bien \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad o\ bien \quad x = 1$$

Luego, el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Usamos el teorema de Bolzano para encontrar el conjunto de positividad, y para esto necesitamos conocer previamente el conjunto de ceros.

$$\frac{x-2}{x\,(x-1)} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Notamos que $x = 2$ pertenece al dominio de la función, y luego $C_0 = \{2\}$. Teniendo en cuenta la raíz $x = 2$, se divide al dominio en los siguientes conjuntos donde evaluaremos el signo de la función: $(-\infty, 0), (0, 1), (1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

En $(-\infty, 0)$, tomamos un punto intermedio, digamos $x = -1$, y vemos el signo de la función en ese punto $f(-1) = \frac{-1-2}{(-1)(-1-1)} = \frac{-3}{2} < 0$. Como f es continua, no se anula en ese conjunto, y toma signo negativo en un punto intermedio, por Bolzano la función es negativa en todo el conjunto $(-\infty, 0)$.

Análogamente, en $(0, 1)$ tenemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{4}} > 0$. Luego, f es positiva en todo el intervalo $(0, 1)$.

Aplicando el mismo razonamiento, obtenemos que f es negativa en $(1, 2)$ ya que $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, y que f es positiva en $(2, +\infty)$ ya que $f(3) > 0$.

Del análisis anterior, concluimos que el conjunto de positividad de f es

$$C_+ = (0, 1) \cup (2, +\infty).$$