TEMA 4

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 2$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 2$ es, por definición, encontrar el valor de "a" tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = 2$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común "x^2" tanto en el numerador como en el numerador para, luego de simplificar el "x^2" y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(20 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2a + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{20 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}{2a + \frac{1}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \to \infty$, quiere decir que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{20x^2 - x + 7}{2ax^2 + 1} = \frac{20}{2a} = \frac{10}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{10}{a} = 2 \implies \quad a = 5$$

TERCER TURNO (09/10/2017)

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas como

$$g(x) = \frac{2x}{x-1} \qquad f(x) = K \cdot g^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $K \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 3$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $g^{-1}(x)$:

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

$$y\,(x-1) = 2x$$

$$yx - y = 2x$$

$$yx - 2x = y$$

$$x(y-2) = y$$

$$x = \frac{y}{y-2}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

Entonces

$$f(x) = K \cdot \frac{x}{x-2}$$

Como

$$3 = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = K \cdot \frac{1}{1-2} \quad \Leftrightarrow \quad K = -3$$

Ejercicio 3 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |4 - x| \geq 5\}$$

hallar analíticamente el conjunto $A \cap B$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $A \cap B$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos A y B.

Si $x \in A \quad \Longrightarrow \quad x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2; +\infty)$, luego $\boldsymbol{A} = (\mathbf{-2}; +\infty)$

Si $x \in B \quad \Longrightarrow \quad |4 - x| \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x \geq 5 \quad$ ó $\quad 4 - x \leq -5$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|4 - x| \geq 5$

$$4 - x \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1]$$

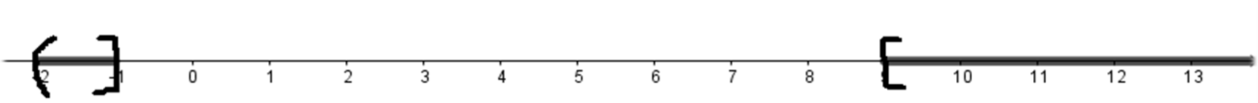
$$4 - x \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq -9 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [9; +\infty)$$

Luego $x \in B \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1]$ ó $\mathit{si} \quad x \in [9; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$\boldsymbol{B} = (-\infty; \mathbf{-1}] \cup [\mathbf{9}; +\infty)$

Entonces

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = (\mathbf{-2}; +\infty) \cap \left((-\infty; \mathbf{-1}] \cup [\mathbf{9}; +\infty)\right) = (\mathbf{-2}; \mathbf{-1}] \cup [\mathbf{9}; +\infty)$



Ejercicio 4 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = x - 3 \quad ; \quad g(x) = 2(x-5)^2 + 1$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $(g \circ f)(x) = f(36)$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ f$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2 \cdot (f(x) - 5)^2 + 1 = 2 \cdot ((x-3) - 5)^2 + 1 = 2 \cdot (x-8)^2 + 1$

Por otro lado

$f(36) = 36 - 3 = 33$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ f)(x) = f(36)$$

Entonces

$2 \cdot (x-8)^2 + 1 = 33$

$2 \cdot (x-8)^2 = 32$

$(x-8)^2 = 16$

$|x-8| = \sqrt{16}$

$|x-8| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 8 = 4 \ \text{ ó } \ x - 8 = -4$

$\Leftrightarrow \quad x = 12 \ \text{ ó } \ x = 4$

TEMA 5

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = x + 5 \quad ; \quad g(x) = 3(x+1)^2 - 2$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$g \circ f(x) = f(20)$$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 3 \cdot (f(x) + 1)^2 - 2 = 3 \cdot (x + 5 + 1)^2 - 2 = 3 \cdot (x+6)^2 - 2$$

Por otro lado

$$f(20) = 20 + 5 = 25$$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ f)(x) = f(20)$$

Entonces

$$3 \cdot (x+6)^2 - 2 = 25$$

$$3 \cdot (x+6)^2 = 27$$

$$(x+6)^2 = 9$$

$$|x+6| = \sqrt{9}$$

$$|x+6| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 6 = 3 \text{ ó } x + 6 = -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ ó } x = -9$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 < 0\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$$

hallar analíticamente el conjunto $M \cap N$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $M \cap N$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos M y N.

Si $x \in M \quad \Longrightarrow \quad x + 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -5)$, luego $\boldsymbol{M} = (-\infty; -\mathbf{5})$

Si $x \in N \quad \Longrightarrow \quad |3 - x| \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x \geq 2$ ó $3 - x \leq -2$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|3 - x| \geq 2$

$$3 - x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 1]$$

$$3 - x \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [5; +\infty)$$

Luego $x \in N \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 1]$ ó $si \quad x \in [5; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$\boldsymbol{N} = (-\infty; \mathbf{1}] \cup [\mathbf{5}; +\infty)$

Entonces

$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} = (-\infty; -\mathbf{5}) \cap \left((-\infty; \mathbf{1}] \cup [\mathbf{5}; +\infty)\right) = (-\infty; -\mathbf{5})$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 3$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 3$ es, por definición, encontrar el valor de "a" tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = 3$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común "x^2" tanto en el numerador como en el numerador para, luego de simplificar el "x^2" y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(36 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3a + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{36 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3a + \frac{6}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \to \infty$

Quiere decir que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{36x^2 - 2x + 1}{3ax^2 + 6} = \frac{36}{3a} = \frac{12}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{12}{a} = 3 \quad \Longrightarrow \quad a = 4$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas como

$$f(x) = \frac{5x}{x-3} \qquad g(x) = A \cdot f^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $A \in \mathbb{R}$ sabiendo que $g(2) = 10$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $f^{-1}(x)$:

$$y = \frac{5x}{x-3}$$

$$y\,(x-3) = 5x$$

$$yx - 3y = 5x$$

$$yx - 5x = 3y$$

$$x(y-5) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{y-5}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-5}$$

Entonces

$$g(x) = A \cdot \frac{3x}{x-5}$$

Como

$$10 = g(2) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = A \cdot \frac{3 \cdot 2}{2-5} \quad \Leftrightarrow \quad 10 = A \cdot \frac{6}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad A = -5$$

TEMA 6

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que la recta de ecuación $y = 4$ sea una asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2}$$

Respuesta

Hallar la asíntota horizontal en $y = 4$ es, por definición, encontrar el valor de "a" tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = 4$$

Para calcular este límite podemos sacar factor común "x^2" tanto en el numerador como en el numerador para, luego de simplificar el "x^2" y analizar a que tienden cada uno de los términos de la expresión obtenida.

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(32 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(4a + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{32 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{4a + \frac{2}{x^2}}$$

Salvo el primer término, tanto del numerador como del denominador, todos los demás tienden a cero cuando $x \to \infty$

Quiere decir que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{32x^2 - 3x + 5}{4ax^2 + 2} = \frac{32}{4a} = \frac{8}{a}$$

y por lo tanto

$$\frac{8}{a} = 4 \quad \Longrightarrow \quad a = 2$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dadas las funciones $f(x),\ h(x)$ definidas como

$$h(x) = \frac{9x}{x+2} \qquad f(x) = M \cdot h^{-1}(x)$$

hallar el valor de la constante $M \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f(2) = 8$

Respuesta

En primer lugar debemos obtener la expresión de $h^{-1}(x)$:

$$y = \frac{9x}{x+2}$$

$$y\,(x+2) = 9x$$

$$yx + 2y = 9x$$

$$yx - 9x = -2y$$

$$x(y-9) = -2y$$

$$x = \frac{-2y}{y-9}$$

Luego, haciendo un cambio en el nombre de la variables

$$h^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-9}$$

Entonces

$$f(x) = M \cdot \frac{-2x}{x-9}$$

Como

$$8 = f(2) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = M \cdot \frac{-2 \cdot 2}{2-9} \quad \Leftrightarrow \quad 8 = M \cdot \frac{-4}{-7} \quad \Leftrightarrow \quad M = 14$$

Ejercicio 3 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} : |5 - x| \geq 2\}$$

hallar analíticamente el conjunto $S \cap T$ y representarlo en la recta real.

Respuesta

Sabemos que pertenecerán al conjunto $S \cap T$ todos aquellos números reales que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos S y T.

Si $x \in S \quad \Longrightarrow \quad x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1; +\infty)$, luego $\boldsymbol{S} = (\mathbf{-1}; +\infty)$

Si $x \in T \quad \Longrightarrow \quad |5 - x| \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 - x \geq 2 \quad$ ó $\quad 5 - x \leq -2$

Analizamos por separado las dos posibilidades que surgen al plantear $|5 - x| \geq 2$

$$5 - x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 3]$$

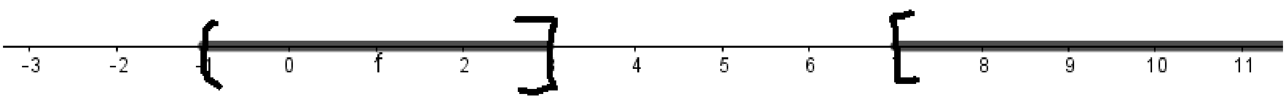
$$5 - x \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq -7 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [7; +\infty)$$

Luego $x \in T \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 3] \quad$ ó $\quad si \quad x \in [7; +\infty)$, que es lo mismo que decir que

$\boldsymbol{T} = (-\infty; \mathbf{3}] \cup [\mathbf{7}; +\infty)$

Entonces

$\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T} = (\mathbf{-1}; +\infty) \cap \big((-\infty; \mathbf{3}] \cup [\mathbf{7}; +\infty)\big) = (\mathbf{-1}; \mathbf{3}] \cup [\mathbf{7}; +\infty)$



TERCER TURNO (09/10/2017)

Ejercicio 4 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$h(x) = x + 1 \quad ; \quad g(x) = 7(x-2)^2 + 3$$

determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$g \circ h(x) = h(30)$$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $g \circ h$.

$(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = 7 \cdot (h(x) - 2)^2 + 3 = 7 \cdot (x + 1 - 2)^2 + 3 = 7 \cdot (x-1)^2 + 3$

Por otro lado

$h(30) = 30 + 1 = 31$

Ahora debemos buscar para qué valores reales de x se verifica que

$$(g \circ h)(x) = h(30)$$

Entonces

$7 \cdot (x-1)^2 + 3 = 31$

$7 \cdot (x-1)^2 = 28$

$(x-1)^2 = 4$

$|x-1| = \sqrt{4}$

$|x-1| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 2 \text{ ó } x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = 3} \text{ ó } \boldsymbol{x = -1}$