TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el dominio e imagen de la **función inversa** de

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+5x}$$

Respuesta

Hallamos la función inversa de f(x):

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{1+5x}$$

$$2y = \sqrt{1+5x}$$

$$(2y)^2 = \left(\sqrt{1+5x}\right)^2$$

$$4y^2 = 1+5x$$

$$4y^2 - 1 = 5x$$

$$\frac{4}{5}y^2 - \frac{1}{5} = x$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

El dominio de la función inversa coincide con la imagen de la función f.

Dado que $\sqrt{t} \geq 0$ para todo $t \geq 0$ tenemos que

$$\sqrt{1+5x} \geq 0 \quad \therefore \quad f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+5x} \geq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la función inversa es

$$\boldsymbol{Dominio}\left(\boldsymbol{f^{-1}}\right) = [\mathbf{0}; +\infty)$$

La gráfica correspondiente a la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ es una parábola.

Para determinar la imagen de la función inversa podemos calcular el vértice de dicha parábola:

$$V = \left(0; -\frac{1}{5}\right)$$

Observamos que el coeficiente principal es positivo, por lo tanto, la parábola es cóncava hacia arriba.

$$\boldsymbol{Imagen}(\boldsymbol{f^{-1}}) = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}; +\infty\right)$$

Otra manera de encontrar el conjunto imagen:

Para todo x en el dominio de la función inversa se verifica que

$$\frac{4}{5}x^2 \geq 0$$

entonces

$$\frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5} \geq -\frac{1}{5}$$

y por lo tanto

$$f^{-1}(x) \geq -\frac{1}{5}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} :\ -5 \leq 3x - 2 \leq 10\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 2 < 11\}$ hallar analíticamente el conjunto $A \cap B$

Respuesta

Primero vamos a hallar analíticamente cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto A.

Tenemos que $A = \{x \in \mathbb{R} :\ -5 \leq 3x - 2 \leq 10\}$, entonces:

$$-5 \leq 3x - 2 \leq 10$$
$$-5 + 2 \leq\ 3x \leq 10 + 2$$
$$-3 \leq\ 3x \leq 12$$
$$-1 \leq\ x \leq 4 \qquad \Rightarrow \qquad x \in [-1; 4] = A$$

Ahora vamos a hallar cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto B.

$B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 2 < 11\}$

$x^2 + 2 < 11$

$x^2 < 11 - 2$

$x^2 < 9$

$|x| < 3 \quad x \in (-3; 3)$

Entonces, $B = (-3; 3)$

Ahora debemos hallar el conjunto $A \cap B$:

$$A \cap B = [-1; 4] \cap (-3; 3) = [-1; 3)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Decidir si $x = 1$ pertenece al conjunto

$$A = \{x \in R \ : \ 5 - f(x) \geq 0\}$$

siendo f la función lineal que verifica que $f(3) = 0$ y cuya gráfica pasa por el punto $(-1; 6)$.

Justificar la respuesta.

Respuesta

Primero debemos hallar la función lineal f. Tenemos que:

$$f(x) = mx + b$$

Como $f(3) = 0$

$$0 = 3m + b \quad \Longrightarrow \quad b = -3m$$

Por otro lado, la gráfica de la función pasa por el punto $(-1; 6)$

$$6 = -m + b$$

y como $b = -3m$

$$6 = -m + (-3m) \quad \Longrightarrow \quad 6 = -4m \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{3}{2} \quad y \quad b = -3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

Entonces

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

Para ver si $x = 1$ pertenece al conjunto A debemos ver si se cumple que $5 - f(1) \geq 0$

$$5 - f(1) = 5 - \left(-\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{9}{2}\right) = 5 - \frac{6}{2} = 2 \geq 0$$

Como se cumple la desigualdad, $x = 1$ pertenece al conjunto A.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dado el polinomio $P(x) = (3x^2 - kx - 30)(x^2 - 1)$, hallar el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ si se sabe que $x = -2$ es raíz del polinomio.

Hallar el conjunto de positividad C^+del polinomio.

Respuesta

Dado que $x = -2$ es raíz del polinomio $P(x)$ se verifica que $P(-2) = 0$

$$[3 \cdot (-2)^2 - k \cdot (-2) - 30] \cdot [(-2)^2 - 1] = 0$$
$$[2k - 18] \cdot 3 = 0$$
$$2k - 18 = 0$$
$$k = 9$$

Entonces,

$$P(x) = (3x^2 - 9x - 30)(x^2 - 1)$$

Las raíces de la cuadrática $3x^2 - 9x - 30$ son $x = 5$ y $x = -2$, entonces

$$3x^2 - 9x - 30 = 3(x - 5)(x + 2)$$

Por otro lado, aplicando diferencia de cuadrados tenemos que:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es

$$P(x) = 3(x - 5)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$$

Aplicando el Teorema de Bolzano y reemplazando por algún valor, analizamos el conjunto de positividad. Por ejemplo, en x = 0 el polinomio alcanza un valor positivo. Considerando que el polinomio tiene raíces simples se deduce que:

$$\boldsymbol{C^+} = \mathbf{(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (5; +\infty)}$$