Matemática

Clave de corrección primer parcial

Tercer turno – Tema 4 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (3 puntos)
Representar en el plano el siguiente conjunto

$$N = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \left|\frac{1}{2}x + 2\right| < 3 \ ; \ \ |y| \geq 2\right\}$$

Sea $(x; y) \in N$.

Los valores de x satisfacen que

$$\left|\frac{1}{2}x + 2\right| < 3$$

$$-3 < \frac{1}{2}x + 2 < 3$$

$$-3 - 2 < \frac{1}{2}x < 3 - 2$$

$$-5 < \frac{1}{2}x < 1$$

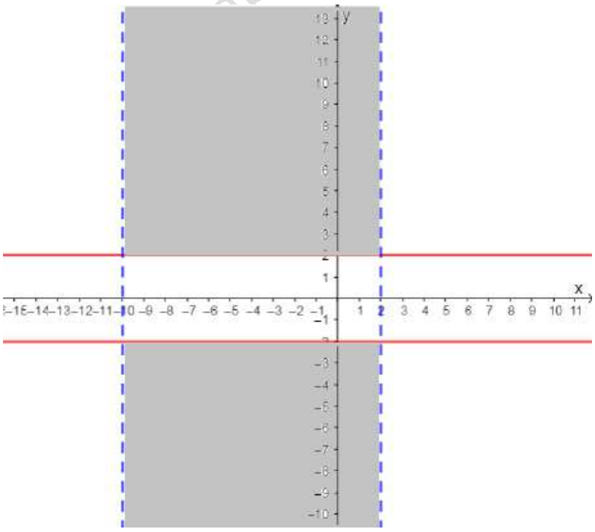
$$-10 < x < 2$$

Los valores de la coordenada y satisfacen que

$$|y| \geq 2 \quad \rightarrow \quad y \leq -2 \ o \quad y \geq 2$$

Entonces,

$$N = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -10 < x < 2 \quad ; \ y \leq -2 \ o \quad y \geq 2\}$$



Ejercicio 2 (2 puntos)
Expresar como intervalo o unión de intervalos el siguiente conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 3x - 1 \leq 5x + 2\}$$

Resolvemos la inecuación:

$$x^2 + 3x - 1 \leq 5x + 2$$
$$x^2 + 3x - 1 - 5x - 2 \leq 0$$
$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

El conjunto que buscamos está formado por todos los valores de x para los cuales la cuadrática $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

La cuadrática $x^2 - 2x - 3$ se anula cuando $x = -1$ y $x = 3$

Analizamos el signo de la cuadrática $x^2 - 2x - 3$ en los intervalos determinados por sus raíces:

- en el intervalo $(-\infty; -1)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = -4$ tenemos que $(-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 3 = 16 + 8 - 3 = 21$
- en el intervalo $[-1; 3]$ el signo es negativo ya que si especializamos en $x = 0$ tenemos que $(0)^2 - 2 \cdot (0) - 6 = -6$
- en el intervalo $(3; +\infty)$ el signo es positivo ya que si especializamos en $x = 5$ tenemos que $(5)^2 - 2 \cdot (5) - 6 = 25 - 10 - 6 = -16$

Entonces,

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 3x - 1 \leq 5x + 2\} = [-1; 3]$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Resolvemos la inecuación:

$$x^2 + 3x - 1 \leq 5x + 2$$
$$x^2 + 3x - 1 - 5x - 2 \leq 0$$
$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

El conjunto que buscamos está formado por todos los valores de x para los cuales la cuadrática $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

La cuadrática $x^2 - 2x - 3$ se anula cuando $x = -1$ y $x = 3$, expresamos en forma factorizada la ecuación:

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

Se desprenden 2 situaciones:

- Situación I:
  $(x+1) \geq 0$ $\quad y\ además \quad$ $(x - 3) \leq 0$
  $x \geq -1$ $\quad y\ además \quad$ $x \leq 3$

  Solución I $= [-1;3]$

- Situación II:
  $(x+1) \leq 0$ $\quad y\ además \quad$ $(x - 3) \geq 0$
  $x \leq -1$ $\quad y\ además \quad$ $x \geq 3$

  Solución II$= \emptyset$

Entonces,

$\{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 + 3x - 1 \leq 5x + 2\} = [-1;3]$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar el valor de la constante $t \in \mathbb{R}$ si se sabe que la recta perpendicular a $y = 3x + 2$ pasa por los puntos $(6;2)$ y $(3-t;8)$.

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta que buscamos.

Por ser perpendicular a la recta $y = 3x + 2$ sabemos que

$$m = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado, como pasa por el punto $(6;2)$ tenemos que $2 = m(6) + b$.

Entonces:

$$m = -\frac{1}{3}$$

$$2 = 6m + b \quad \leftrightarrow \quad 2 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + b \quad \leftrightarrow \quad b = 4$$

La ecuación de la recta es

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

La recta hallada pasa también por el punto $(3 - t; 8)$, entonces:

$$8 = -\frac{1}{3}(3 - t) + 4$$

$$8 = -1 + \frac{1}{3}t + 4$$

$$8 + 1 - 4 = \frac{1}{3}t \quad \leftrightarrow \quad 5 = \frac{1}{3}t \quad \leftrightarrow \quad t = 15$$

Otra manera de resolver el ejercicio

La recta que estamos buscando es perpendicular a la dada, en consecuencia, sus pendientes son inversas y opuestas, por lo tanto:

$$m = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado, sabemos que la recta que buscamos pasa por los puntos $(6; 2)$ y $(3 - t; 8)$. Podemos entonces reemplazar las coordenadas de los puntos en la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8 - 2}{3 - t - 6} = \frac{6}{-3 - t}$$

Sabemos que $m = -\frac{1}{3}$, por lo tanto:

$$-\frac{1}{3} = \frac{6}{-3 - t}$$

$$-1 \cdot (-3 - t) = 18$$

$$3 + t = 18$$

$$t = 18 - 3$$

$$t = 15$$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dada la función $f(x) = \frac{b-x}{x+1}$ hallar el valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f^{-1}(1) = 3$

Para hallar la función inversa de f despejamos x en función de y:

$$y = \frac{b-x}{x+1}$$

$$y(x+1) = b - x$$

$$yx + y = b - x$$

$$yx + x = b - y$$

$$x(y+1) = b - y$$

$$x = \frac{b - y}{y+1}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables,

$$f^{-1}(x) = \frac{b-x}{x+1}$$

Sabemos que $f^{-1}(1) = 3$, entonces:

$$\frac{b-1}{1+1} = 3$$

$$b = 7$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $f^{-1}(1) = 3$ entonces $f\left(f^{-1}(1)\right) = f(3)$, pero como $f\left(f^{-1}(1)\right) = 1$ tenemos que

$$f(3) = 1$$

$$\frac{b-3}{3+1} = 1$$

$$b - 3 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 7$$