Matemática

Clave de corrección primer parcial

Tercer turno – Tema 2 - 02/10/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $g(x) < f(x)$ siendo $g(x) = 3x^2 - x$ y $f(x) = 4x^2 - x - 9$

Solución

Tenemos que hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $g(x) < f(x)$:

$$g(x) < f(x)$$
$$3x^2 - x < 4x^2 - x - 9$$
$$3x^2 - x - 4x^2 + x < -9$$
$$-x^2 < -9 \quad \leftrightarrow \quad x^2 > 9 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{x^2} > \sqrt{9} \quad \leftrightarrow \quad |x| > 3 \quad \leftrightarrow \quad x > 3 \text{ ó } x < -3$$

Luego $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar la expresión de la función lineal cuya ordenada al origen vale 2, y cuya gráfica pasa por el punto máximo de la parábola $y = -3x^2 + 2x + 1$

Solución

Sea $f(x) = ax + b$ la función lineal que buscamos.

Si su ordenada al origen vale 2 quiere decir que $f(0) = 2$, entonces:

$$2 = a \cdot 0 + b \quad \rightarrow \quad b = 2$$

Entonces, $f(x) = ax + 2$

La gráfica de la función (que es una recta) pasa por el punto máximo de la parábola y. Dado que el coeficiente principal de la parábola es negativo, el punto máximo coincide con el vértice de la parábola.

Buscamos las coordenadas del vértice:

$$x_v = \frac{-(2)}{2\cdot(-3)} = \frac{1}{3}$$

$$y_v = -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{3}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$V = (x_v; y_v) = \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Entonces, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$ y

$$a\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{4}{3} - 2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{3} = -\frac{2}{3} \quad \leftrightarrow \quad a = -2$$

La función lineal es $f(x) = -2x + 2$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el dominio e imagen de la función $f(x) = 3 - \sqrt{2x-5}$

Solución

La función f estará bien definida si lo está la raíz cuadrada.

Pedimos entonces que:

$$2x - 5 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{2}$$

Luego, $Dom(f) = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

Para hallar el conjunto imagen de la función planteamos que:

$$\sqrt{2x-5} \geq 0 \quad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

$$-\sqrt{2x-5} \leq 0$$

$$3 - \sqrt{2x-5} \leq 3 \quad \therefore \quad f(x) \leq 3$$

Luego, $Im(f) = (-\infty; 3]$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar los intervalos de positividad del polinomio $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ si se sabe que $Q(1) = 0$.

Solución

Para hallar los intervalos de positividad del polinomio usaremos la "consecuencia del teorema de Bolzano" que dice: *Si Q es una función continua y, x_1 y x_2 son dos ceros consecutivos de Q, entonces $(x_1; x_2)$ es un intervalo de positividad o bien $(x_1; x_2)$ es un intervalo de negatividad.*

Vamos a buscar las raíces del polinomio Q y luego analizar su signo en los intervalos determinados por la/las raíces.

Se sabe que $Q(1) = 0$. Es decir, $x = 1$ es una raíz del polinomio Q y por lo tanto es divisible por $(x - 1)$

Por Ruffini

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

Entonces,

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

Este polinomio se anula ($Q(x) = 0$) si:

$$(x - 1) = 0 \text{ ó } (x^2 - x - 6) = 0$$

Vamos a buscar las raíces de $(x^2 - x - 6)$:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\leftrightarrow \quad x_1 = 3 \ , \ x_2 = -2$$

Entonces, el polinomio se anula en $x = -2, x = 1$ y en $x = 3$.

Analizamos el signo del polinomio en los intervalos

$$(-\infty; -2), (-2; 1), (1; 3), (3; +\infty)$$

- $-3 \in (-\infty; -2)\ y\ \ Q(-3) = -24$, el polinomio es negativo en el intervalo $(-\infty; -2)$
- $0 \in (-2; 1)\ y\ \ Q(0) = 6$, el polinomio es positivo en el intervalo $(-2; 1)$
- $2 \in (1; 3)\ y\ \ Q(2) = -4$, el polinomio es negativo en el intervalo $(1; 3)$
- $4 \in (3; +\infty)\ y\ \ Q(4) = 10$, el polinomio es positivo en el intervalo $(3; +\infty)$

El polinomio es positivo en los intervalos $(-2; 1)$ y $(3; +\infty)$.