**Ejercicio 1**

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + x + 3$ y $g(x) = 2x + 9$ determinar analíticamente el conjunto $A = \{x \in R \; tal \; que: f(x) \geq g(x)\}$

**Solución y comentarios**

Para hallar analíticamente el conjunto $A$ lo que debemos hacer es armar la inecuación que resulta de la condición dada para el conjunto.

$$f(x) \geq g(x)$$
$$x^2 + x + 3 \geq 2x + 9$$
$$x^2 + x + 3 - 2x - 9 \geq 0$$
$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

Para resolver la última inecuación podemos trabajar con la función cuadrática asociada a ella.

Sea $h(x) = x^2 - x - 6$ la función cuadrática asociada.

Analizaremos cuales son los valores para los cuales esta función se anula, para luego poder analizar los conjuntos de positividad y negatividad de $h$.

Para hallar los ceros (o raíces) de $h$ usamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo

$$a = 1, b = -1 \text{ y } c = -6$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Entonces

$$x = -2 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

son las raíces de $h$.

Por lo tanto podemos escribir

$$h(x) = x^2 - x - 6 = (x - (-2)) \cdot (x - 3) = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Ahora retomamos la resolución de nuestro problema original: hallar los valores de $x \in R$ para los cuales

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

que es equivalente a hallar los valores de $x \in R$ para los cuales

$$(x+2) \cdot (x-3) \geq 0$$

Para que el producto de los monomios sea mayor o igual a cero hay dos posibilidades:

- Primer caso:

$$x + 2 \leq 0 \quad y \quad x - 3 \leq 0 \qquad (\mathbf{A})$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \leq -2 \quad y \quad x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \in (-\infty; -2] \cap (-\infty; 3] = (-\infty; -2]$$

Luego, el conjunto solución para **(A)** son los valores de $x \in (-\infty; -2]$.

$\mathbf{Sol}_{\boldsymbol{A}} = (-\infty; -\mathbf{2}]$

- Segundo caso

$$x + 2 \geq 0 \quad y \quad x - 3 \geq 0 \qquad (\mathbf{B})$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \geq -2 \quad y \quad x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \in [-2; +\infty) \cap [3; +\infty) = [3; +\infty)$$

Luego, el conjunto solución para (**B**) son los valores de $x \in [3; +\infty)$.

$\mathbf{Sol}_{\boldsymbol{B}} = [3; +\infty)$

El conjunto solución de $(x+2) \cdot (x-3) \geq 0$ es:

$\mathbf{Sol}_{\boldsymbol{A}} \cup \mathbf{Sol}_{\boldsymbol{B}} = (-\infty; -\mathbf{2}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$

Finalmente,

$$f(x) \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -\mathbf{2}] \cup [\mathbf{3}; +\infty)$$

**Ejercicio 2**

Siendo $f(x) = ax^3 - (b+1)x^2 - ax - a$, determinar los valores de $a, b \in R$ para que se cumpla que $f(0) = 1$ y el punto $P = (-1, -2)$ pertenezca a la gráfica de $f$.

**Solución y comentarios**

Aplicamos las condiciones dadas:

$$f(0) = 0^3 - (b+1) \cdot 0^2 - a \cdot 0 - a = -a$$

$$f(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad -a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Entonces

$$f(x) = -x^3 - (b+1) \cdot x^2 + x + 1$$

Como el punto $(-1; -2)$ pertenece al gráfico de $f$:

$$f(-1) = -2$$

$$-(-1)^3 - (b+1) \cdot (-1)^2 + (-1) + 1 = -2$$

$$1 - (b+1) - 1 + 1 = -2$$

$$1 - b - 1 = -2$$

$$b = 2$$

Finalmente,

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 1$$

**Ejercicio 3**

Hallar, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal (hallando previamente el valor de $b \in R$), de la función

$$f(x) = \frac{1 - b^2 x}{2bx + 3}$$

sabiendo que tiene una asíntota vertical en $x = 1/2$.

**Solución y comentarios**

En primer lugar hallaremos el valor de $\boldsymbol{b}$**.** Si la función $f$ tiene una asíntota vertical en $x = 1/2$ sabemos que para ese valor se anula el denominador:

$$2b\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$$

$$b + 3 = 0$$

$$b = -3$$

Entonces

$$f(x) = \frac{1 - 9x}{-6x + 3}$$

Para hallar la asíntota horizontal vemos si existe límite finito de la función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 9x}{-6x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} - 9\right)}{x\left(-6 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} - 9\right)}{\left(-6 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - 9x}{-6x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} - 9\right)}{x\left(-6 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} - 9\right)}{\left(-6 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

Luego la ecuación de la asíntota horizontal es

$$y = \frac{3}{2}$$

**Ejercicio 4**

Sea

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$$

hallar $f^{-1}(x)$.

**Solución y comentarios**

En primer lugar determinamos el dominio de la función.

La función estará bien definida siempre y cuando el denominador sea distinto de cero. Entonces,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Para hallar la función inversa planteamos

$$f(x) = y$$

y operamos hasta encontrar una expresión de $x$ en función de $y$:

$$\frac{x+2}{2x+1} = y$$

$$x+2 = y \cdot (2x+1)$$

$$x+2 = 2yx + y$$

$$x - 2yx = y - 2$$

$$x(1-2y) = y-2$$

$$x = \frac{y-2}{1-2y}$$

Como el nombre que le demos a la variable no importa

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{1-2x}$$

La función inversa estará definida siempre y cuando $1-2x \neq 0$. Entonces,

$$Dom(f^{-1}) = \{x \in R : 1-2x \neq 0\} = \left\{x \in R : x \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

**Ejercicio 5**

Dadas las funciones

$$f(x) = 5 - 3x \quad y \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

hallar $g \circ f$ y $f \circ g$

**Solución y comentarios**

Vamos a hallar $g \circ f$:

$$(g \circ f\ )(x) = g\big(f(x)\big) = g(5 - 3x) = \sqrt{(5 - 3x)^2 + 1}$$

La función $g \circ f$ está bien definida en todo el conjunto de los números reales.

Vamos a hallar $f \circ g$:

$$(f \circ g)\ (x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = 5 - 3\sqrt{x^2 + 1}$$

La función $f \circ g$ está definida en todo el conjunto de los números reales.