Matemática para Agronomía, Ciencias Ambientales y Ciencias Biológicas

Clave de corrección examen Final– 12/07/2019

**Ejercicio 1** (2 puntos)
Hallar la ecuación implícita del plano perpendicular a la recta

$$(x, y, z) = (3 - t, 5t, 4 + 3t)$$

que contiene al punto $(3; 3; 2)$.

La recta $(x, y, z) = (3 - t, 5t, 4 + 3t)$ se puede expresar como

$$(x, y, z) = (3; 0; 4) + t(-1; 5; 3)$$

El vector dirección de la recta es $v = (-1; 5; 3)$

Si llamamos $\pi$ al plano, por ser perpendicular a la recta

$$\pi: \quad -x + 5y + 3z = a$$

Para hallar la constante a usamos el hecho de que pasa por el punto $(3; 3; 2)$, entonces

$$-3 + 5(3) + 3(2) = a \quad \therefore \quad a = 18$$

$$\pi: \quad -x + 5y + 3z = 18$$

**Ejercicio 2** (3 puntos)

Calcular la siguiente integral definida

$$\int_1^2 (1+2x)^2 + e^{3x}\ dx$$

$$\int_1^2 (1+2x)^2 + e^{3x}\ dx = \int_1^2 (1+2x)^2\ dx + \int_1^2 e^{3x}\ dx$$

Si llamamos $u = 1 + 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int (1+2x)^2\,dx = \int u^2 \frac{1}{2}du = \frac{1}{6}u^3 + K = \frac{1}{6}(1+2x)^3 + K$$

Si llamamos $v = 3x \quad \Rightarrow \quad dv = 3dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}dv = dx$

$$\int e^{3x}\,dx = \int e^v \frac{1}{3}dv = \frac{1}{3}e^v + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Entonces,

$$\int_1^2 (1+2x)^2\ dx + \int_1^2 e^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{6}(1+2x)^3\right]\Bigg|_1^2 + \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{6}(1+2\cdot 2)^3 - \frac{1}{6}(1+2\cdot 1)^3\right] + \left[\frac{1}{3}e^{3\cdot 2} - \frac{1}{3}e^{3\cdot 1}\right] =$$

$$= \frac{49}{3} + \frac{1}{3}(e^6 - e^3)$$

**Ejercicio 3** (2 puntos)

Dada la matriz $\boldsymbol{A}$ hallar la solución del sistema

$$A^{-1}\cdot \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&5\end{pmatrix}$$

Primero debemos hallar la expresión de la matriz inversa de $A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\2&0&5&0&0&1\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{fila\ 3-2\cdot fila\ 1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&0&3&-2&0&1\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{\frac{1}{3}fila\ 2\,;\frac{1}{3}fila\ 3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{fila\ 1-fila 3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{5}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{5}{3}&0&-\frac{1}{3}&2\\0&\frac{1}{3}&0&1\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&1\end{array}\right)\underbrace{\longrightarrow}_{\frac{3}{5}fila 1\,;3\ fila\ 2;-\frac{3}{2}fila\ 3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{6}{5}\\0&1&0&3\\1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)\underbrace{\longrightarrow}_{fila\ 3-fila\ 1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{6}{5}\\0&1&0&3\\0&0&-\frac{3}{10}&-\frac{27}{10}\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\longrightarrow}_{-\frac{10}{3}fila\ 3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{6}{5}\\0&1&0&3\\0&0&1&9\end{array}\right)\underbrace{\longrightarrow}_{fila\ 1+\frac{1}{5}fila\ 3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&3\\0&0&1&9\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4** (3 puntos)

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = e^{x^4 - x^3}$$

y decidir si tiene puntos máximos y mínimos. Justificar.

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

La derivada primera de la función es

$$f'(x) = (4x^3 - 3x^2) \cdot e^{x^4-x^3} = x^2(4x-3) \cdot e^{x^4-x^3}$$

El dominio de la derivada primera es el conjunto de todos los números reales.

Ya que $e^{x^4-x^3} > 0$ tenemos que

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2(4x-3) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0\,; x = \frac{3}{4}$$

Analizamos el signo de la derivada primera en los intervalos

$$(-\infty; 0)\,, \left(0; \frac{3}{4}\right)\,, \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

Para $x \in (-\infty; 0)$ se tiene que $f'(x) < 0$ ya que $f'(-1) < 0$. La función es decreciente en dicho intervalo.

Para $x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$ se tiene que $f'(x) < 0$ ya que $f'\left(\frac{1}{8}\right) < 0$. La función es decreciente en dicho intervalo.

Para $x \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ se tiene que $f'(x) > 0$ ya que $f'(1) > 0$. La función es creciente en dicho intervalo.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.