MATEMÁTICA PARA AGRONOMÍA Y CIENCIAS AMBIENTALES

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER EXAMEN PARCIAL - MESA COMBINADA

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dados los puntos $Q = (1; -2)$ y $P = (a; a+4)$, hallar las coordenadas del punto P sabiendo que la longitud del segmento PQ es 5.

Resolución:

Tenemos que $Q = (1; -2)$ y $P = (a; a+4)$

Por otro lado, sabemos que la distancia entre ambos puntos es 5. Utilizando la fórmula para determinar la distancia entre puntos:

$$d_{PQ} = 5$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+4+2)^2} = 5$$

$$(a-1)^2 + (a+6)^2 = 25$$

Resolvemos los cuadrados:

$$a^2 - 2a + 1 + a^2 + 12a + 36 = 25$$

$$2a^2 + 10a + 37 - 25 = 0$$

$$2a^2 + 10a + 12 = 0$$

La ecuación anterior, es equivalente a:

$$a^2 + 5a + 6 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$a_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, $a_1 = -2$ ó $a_2 = -3$

Si $a = -2 \Rightarrow b = -2 + 4 = 2$

Si $a = -3 \Rightarrow b = -3 + 4 = 1$

Finalmente, las coordenadas del punto P pueden ser: $(-2; 2)$ ó $(-3; 1)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar todos los valores posibles de $x \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$|2x + 5| = 3$$

y además $x \in A$ siendo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \cdot (4 + 3x) \geq 0\}$$

Resolución:

Sea $x \in A$:

$$x^2 \cdot (4 + 3x) \geq 0$$

Para que este producto resulte mayor o igual a cero, los factores deben tener el mismo signo.

Esto significa que:

$$x^2 \geq 0 \quad y\ también \quad 4 + 3x \geq 0$$

O bien:

$$x^2 \leq 0 \quad y\ también \quad 4 + 3x \leq 0$$

Sin embargo, el factor "x^2" será imposible que resulte menor que cero pues "x^2" será siempre positivo. Con esto descartamos la segunda posibilidad.

Analizando la primera posibilidad, tenemos que:

$$4 + 3x \geq 0$$

$$3x \geq -4$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

Y, además la desigualdad $x^2 \geq 0$ se verifica para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

De lo anterior, se deduce que $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$

Por otro lado, en el enunciado aclara que $|2x + 5| = 3$

Por definición de módulo:

$$2x + 5 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

O bien

$$2x + 5 = -3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -8 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

Hasta acá, tenemos que $x = -1$ o bien $x = -4$; pero además $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Pero $-4 \notin \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$; por lo tanto, $x = -1$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el conjunto de ceros C^0 de la función

$$g(x) = \log_2(ax + b)$$

sabiendo que $g(0) = 3$, y además, $g(1) = 16$

Resolución:

Como sabemos que $g(0) = 3$:

$$\log_2(a \cdot 0 + b) = 3 \quad \Rightarrow \quad \log_2(b) = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^3 = b$$

Por lo tanto, $b = 8$ y $g(x) = \log_2(ax + 8)$

Por otro lado, sabemos que $g(1) = 16$

$$\log_2(a \cdot 1 + 8) = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^{16} = a + 18 \quad \Rightarrow \quad a = 65536 - 18 \quad \Rightarrow \quad a = 65518$$

Por lo tanto,

$$g(x) = \log_2(65518x + 8)$$

Tenemos que determinar el C^0 de $g(x)$; para esto, hacemos $g(x) = 0$

$$\log_2(65518x + 8) = 0$$

$$65518x + 8 = 1$$

$$x = -\frac{7}{65518}$$

Por lo tanto, $C^0 = \{-\frac{7}{65518}\}$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + A \qquad (A \in \mathbb{R})$$

y sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 1$

Resolución:

Sabemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$. Entonces:

Cuando $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \to -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \to 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \to 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + A \to A$$

Como sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \left[2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + A\right] = -1$$

obtenemos que $A = -1$

Por lo tanto,

$$f(x) = 2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

Debemos hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 1$:

$$2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 1$$

$$2 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{4}{6}k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$