MATEMÁTICA PARA AGRONOMÍA y CIENCIAS AMBIENTALES

CLAVE DE CORRECCIÓN

EXAMEN FINAL – TEMA 1

12/12/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, y las abscisas de los máximos y/o mínimos locales (si existen) de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

Justificar la respuesta.

Resolución:

El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

Para analizar el crecimiento/decrecimiento de la función estudiamos el signo de la derivada primera.

La derivada primera de la función es

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

El dominio de la derivada primera es el conjunto de los números reales.

Los candidatos a máximos/mínimos son aquellos puntos cuya abscisa verifica que $f'(x) = 0$. Esto se verifica si

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Analizamos el signo de la derivada primera en los intervalos determinados por estos valores:

$$(-\infty; -1) \ ; \ (-1; 1) \ ; \ (1; +\infty)$$

- $-2 \in (-\infty; -1)$ y $f'(-2) = 9 > 0$. En este intervalo la función es creciente.
- $0 \in (-1; 1)$ y $f'(0) = -3 < 0$. En este intervalo la función es decreciente.
- $2 \in (1; +\infty)$ y $f'(2) = 9 > 0$. En este intervalo la función es creciente.
- La función tiene un mínimo relativo en el punto $(1; f(1)) = (1; 3)$
- La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1; f(-1)) = (-1; 7)$

Ejercicio 2 (2 puntos)
Hallar el valor de las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1-c & -b \\ a & 1-d \end{pmatrix}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 2 & b \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+5 & 3+2a+2b \\ 3+2a+2b & 13+b^2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} a^2+5 & 3+2a+2b \\ 3+2a+2b & 13+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c & -b \\ a & 1-d \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales, las constantes deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2+5 &= 1-c \\ 3+2a+2b &= -b \\ 3+2a+2b &= a \\ 13+b^2 &= 1-d \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se tiene que

$$a = -3-2b$$

reemplazando este valor en la segunda ecuación

$$3+2(-3-2b)+2b = -b$$
$$3-6-4b+2b+b = 0$$
$$-3-b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -3$$

luego

$$a = -3-2(-3) = -3+6 = 3$$

De la primera ecuación tenemos que

$$c = -4 - a^2 = 4 - (3)^2 \quad \rightarrow \quad c = -13$$

De la cuarta ecuación tenemos que

$$d = -12 - b^2 = -12 - (-3)^2 \quad \rightarrow \quad d = -21$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el valor de las constantes $a, b \neq 0 \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{12-2z}{b}$$

sea perpendicular al plano de ecuación

$$3x - 2y + z - 4 = 0$$

Justificar la respuesta.

Resolución:

Operamos sobre la ecuación de la recta para tenerla expresada en la "forma simétrica"

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{12-2z}{b}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{-2(z-6)}{b}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{(z-6)}{-\frac{b}{2}}$$

Entonces tenemos que:

- el vector dirección es

  $$v_r = \left(2; 1; -\frac{b}{2}\right)$$

- pasa por el punto

  $A = (-3; a; 6)$

El vector normal del plano es $v_p = (3; -2; 1)$

Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector dirección de la recta debe ser paralelo al vector normal.

Dado que las primeras dos coordenadas del vector dirección de la recta no pueden ser múltiplo de las primeras dos coordenadas del vector normal al plano, ningún valor dado a las constantes hará que la recta sea perpendicular al plano.

Por lo tanto no existe solución.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Calcular el valor de k para que

$$\int_0^2 (kx^2 + x)\, dx = 5$$

Resolución:

Primero hallamos una primitiva de $\int kx^2 + x \; dx$

$$\int (kx^2 + x)\; dx = k\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Aplicando la regla de Barrow

$$\int_0^2 (kx^2 + x)\, dx = k\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = k\frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{2}2^2 = k\frac{8}{3} + 2$$

Como

$$\int_0^2 (kx^2 + x)\, dx = 5$$

tenemos que

$$k\frac{8}{3} + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k\frac{8}{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{9}{8}$$